レプリケーター・ダイナミクスに基づく「均等」立地均衡の安定性

慶　田　　收

要　　約

人口がいくつかの地域に分かれて居住あるいは立地するとき，各地域の魅力に応じて立地するような均衡状態が形成され，安定的に続くことが予想される．本稿では，こうした分析の第 1 次接近としてすべての地域が同程度に好ましいときに安定的な均衡状態として人口は均等に立地することを明らかにする．これを示すために数理生態学 (mathematical biology) の領域で発展してきたレプリケーター・ダイナミクスを用いて立地の進化的安定状態を検討する．

1　はじめに

人口がいくつかの地域あるいは地区に分かれて居住あるいは立地するとき，各地域の魅力に応じて立地するような均衡状態が形成され，安定的に続くことが予想される．本稿では，こうした分析の第 1 次接近としてすべての地域が同程度に好ましいときに安定的な均衡状態として人口は均等に立地することを明らかにする．

都市経済学では，単一中心地理論[1)]の場合，分析は都市の経済的性質を明らかにするために均衡状態[2)]を前提にして地代，立地スペース，居住者数など中心からの距離に関する性質を明らかしてきた．他方，競争を通しての均衡の形成という観点から拙稿 (2006) は純粋競争モデルとして，拙稿 (2008) はワルラス競争均衡モデルの特殊ケースとして初期資源が均等に分布する場合に人口は各地域に均等に立地するという「均等」立地均衡の存在を示した．これらはただ均衡の存在を示したにすぎず，安定性には触れていない．ここでは進化ゲーム論的視点から均衡の安定性を検討する．議論を単純化するために財の需要・供給といった経済的側面の分

---

1)　M. Strszheim (1987) pp. 717−757 を参照．

2)　均衡状態では消費者の場合どこに立地しても同じ効用を実現するという仮定である．

析を捨象して議論を進める．前出の拙稿 (2008) では経済主体による立地選択の指標が効用であり利潤であった．超過効用 (平均効用からの差) および超過利潤 (平均利潤からの差) の空間から人口 (消費者および生産者) シェアの空間への対応として各地域の超過効用，超過利潤から地域人口の比率が決定された．個別経済主体の観点からは効用が平均効用より大きいかどうか，また生産者の場合利潤が平均利潤より大きいかどうかが立地選択の行動基準であった[3)]．それゆえ本稿では平均効用，平均利潤に対応する利得から分析を始める．

進化ゲーム理論に集団全体の平均からの差が状態の変化を生み出すというレプリケーター・ダイナミクス (replicator dynamics) がある．進化ゲーム理論は，元来 J. Maynard Smith (1982) に代表されるように数理生態学の分野で発展し，その後他の分野 (経済学や社会学など) でも新たな展開と応用がなされてきた．進化ゲーム理論には，ひとつに安定な状態に関しての均衡の頑健性などに関する均衡概念や均衡概念間の関係の分析があり，その重要な均衡概念として「進化的安定戦略 (ESS)」が知られてる．これは集団として他の異質な集団から侵略されない安定性を示す基準である．一方，多様な集団状態からある一つの状態あるいは混合戦略状態が選び出されるメカニズムを説明するのがレプリケーター・ダイナミクスである．J. Hofbauer and K. Sigmund (1998) が *Evolutionary Game and Population Dynamics* の 67 ページに 'The replicator dynamics describes the evolution of the ferquencies of strategies in a population' と記述しているように，これは採用戦略による集団の頻度の進展を分析し，その行き着く先の状態がどうなるのかを分析するものである．その行き着く先の平衡状態がレプリケーター・ダイナミクスの進化的均衡あるいは進化的安定状態である．

レプリケーター・ダイナミクスでは，主体は 1 つの純粋戦略を選び対戦によるゲーム利得が主体の子の数を表わし，親の特性が子に受け継がれていくときの集団としての比率 (割合) の変化を分析する．一般に社会的現象では主体は同じ 1 つの戦略を選び続けるものでなく他の戦略を選ぶことが普通である．立地選択の場合も主体はある立地点から別の立地点へと選択を変える．この点からすれば，戦略の変更を考慮に入れる学習ダイナミクス (模倣ダイナミクス，試行錯誤ダイナミクスなど) による分析がよりは適切かもしれない．しかしながら，レプリケーター・ダイナミクスでは戦略を実行する親の行動が子の数の変化 (増大，減少) となって現れその戦略を担う主体のシェア (比率) の変化へとつながるという点と，拙稿 (2008) の立地均衡では地域の選択が超過効用，超過利潤の変化によって地域の人口シェア (比率) の変化へとつ

3)　前出の拙稿 (2008) での平均効用，平均利潤とは，すべての地点にわたる効用あるいは利潤の平均のことを指す．

ながるという点での類似性を認めることができる．よって本稿ではレプリケーター・ダイナミクスによる立地均衡，その安定性の検討を試みる．

本稿の分析目的は，上述のように，人口がいくつかの地域 (地区) に分かれて立地 (居住する) するとき，すべての地域が同等に望ましいならば人口は均等に立地することが進化的均衡 (進化的安定状態) であること (定理 5.3) を示すことである．そのために第 2 節でレプリケーター・ダイナミクスの説明とその例を示すとともに，第 3 節ではレプリケーター・ダイナミクスの平衡点と漸近安定性との関連を検討した後，第 5 節の分析を単純化したケースを考察する．第 4 節で立地選択とレプリケーター・ダイナミクスとの類似性を説明し，第 5 節で本稿の分析目的として定理 5.3 を示す．

2　レプリケーター・ダイナミクスとは

本節では立地均衡分析する分析手法として進化ゲーム理論のレプリケーター・ダイナミクスついて考察する．これは個別の主体間での戦略選択としてのゲーム理論とは異なり，集団から任意にピックアップされた主体が選択する純粋戦略によって集団がどのような均衡状態に落ち着くかを説明する．レプリケーター・ダイナミクスは「自己複製子動学」とも訳出されるように，各主体 (親) の純粋戦略による利得はそれによって複製される子 (親と同じ性質を受け継ぐ子) の数と判断される．ランダムにピックアップされた主体 (親) によって純粋戦略が時間を通じて連続的に選択され子が再生されていく．その結果，各戦略を選択する集団状態が変化していくダイナミクスが記述される．以下では，レプリケーター・ダイナミクスを定式化して例示をおこなう．

大きいが有限な集団は，2 人対称ゲームでにおいて共通の利得関数 u をもち純粋戦略 $i \in N$ (n 個の戦略からなる集合) をとるようにプログラムされた主体のグループ $X_1, \cdots, X_n$ から構成される集合であると仮定する．時点 t において純粋戦略 i をプレーする集団の割合を $x_i(t)$ で表すと，集団状態を表すベクトル $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots x_n(t))$ は混合戦略単体 Δ に属する，すなわち $x(t) \in \Delta$ である．集団が $x \in \Delta$ のとき，ランダムな対戦において純粋戦略 i から得られる期待利得を $u(e^i, x)$ で表す[4]．なお，e^i は混合戦略単体上の第 i 頂点を表し，利得関数 u は連続微分可能とする．レプリケーター・ダイナミクスは，グループ X_i に属する主体の期待利得が集団全体での平均利得より大きければ X_i の割合 x_i は増大し，逆にその期待利得が

4)　混乱をひきおこさない限り，$x(t)$ を x と表わす．

集団の平均利得より小さければ x_i は減少するというダイナミクスである．すなわち，

$$\frac{\dot{x}_i}{x_i}=X_i \text{ の期待値}-\text{期待値の平均}^{5)} \tag{1}$$

である．ここで期待値の平均 $u(x, x)$ は

$$u(x, x)=\sum_{i=1}^{n} x_i u(e^i, x) \tag{2}$$

である．式 (1) より，レプリケーター・ダイナミクスの基本式

$$\dot{x}_i=(u(e^i, x)-u(x, x))x_i \tag{3}$$

が得られる．戦略から得られる $n\times n$ の利得行列を $A=(a_{ij})$ と表すと，$u(e^i, x)=(Ax)_i$ となる．ただし，a_{ij} は定数で，$(Ax)_i$ は n 次元ベクトルの第 i 成分を表すものとする．期待利得 $u(x, y)$ が x に関して線形なので，すなわち

$$\begin{aligned} u(e^i, x)-u(x, x) &= (Ax)_i - x\cdot Ax \\ &= e^i Ax - x\cdot Ax \\ &= (e^i - x)Ax \\ &= u(e^i - x, x) \end{aligned}$$

となるので，ダイナミクスの式 (3) は

$$\dot{x}_i=u(e^i-x, x)x_i \tag{4}$$

のように簡潔に表現される．微分方程式 (3) あるいは (4) の右辺は，単体 $R^n\to R^n$ へのベクトル場を定義している．右辺の式は x に関して連続微分可能であるので，解軌道が一意に存在する[6]．しかも，解は Δ の任意の初期状態を通る (4) の解は必ず Δ に存在するので，単体 Δ は不変である．レプリケーター・ダイナミクス (4) は解軌道が行き着く先の平衡点に注目する．よってレプリケーター・ダイナミクスの均衡は漸近安定な定常 (均衡) 状態を指す．これを進化的均衡 (Evolutionary Equilibrium，EE) と呼んでいる[7]．つまり，平衡 (均衡) 点が①動学過程の定常状態，②漸近安定である．

また表現が異なるが，J. Maynard Smith & G. R. Price (1973) によって示された概念が進化的安定戦略 (Evolutionary Stable Strategy，ESS) で，この条件を満たすものを進化的安定状態 (Evolutionary Stable State) と呼ばれている．ESS の条件とは，点 $\hat{x}\in\Delta$ が任意の $x\neq\hat{x}$ に対する次の 2 条件

5)　$\dot{x}$ は時間 t に関する微分を表わす．
6)　M. W. ハーシュ，S. スメール (1976) p. 173 を参照．
7)　C. Monet and D.Serra (2003) 第 7 章 p. 335 参照．

$$u(\hat{x}, \hat{x}) > u(x, \hat{x}) \qquad \forall x \tag{5}$$

$$u(x, \hat{x}) = u(\hat{x}, \hat{x}) \Rightarrow u\ (x, x) < u(\hat{x}, x) \qquad \forall x \neq \hat{x} \tag{6}$$

である．これは進化ゲームの安定均衡に関する中心的な概念である．

2×2 の 2 人対称ゲームについては，解の状態は 4 つのケースに分類される[8)]．利得行列 $A=(a_{ij})(i, j=1, 2)$ がのとき，$a_1=a_{11}-a_{21}$，$a_2=a_{22}-a_{12}$ (ただし，$a_1 a_2 \neq 0$) として正規化したものを，改めて

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

とおく．するとレプリケーターダイナミクスは

$$\dot{x}_1=(a_1 x_1-a_2 x_2) x_1 x_2 \tag{7}$$

となり，次のように分類される．

1．カテゴリーⅠとⅣ　$a_1 a_2<0$ の場合，$a_1<0$ かつ $a_2>0$ ならば，集団割合 x_1 は常に減少する (カテゴリーⅠ)．$a_1 a_2<0$ で，$a_1>0$ かつ $a_2<0$ ならば，x_1 は常に増加する (カテゴリーⅣ)．カテゴリーⅠの場合には，グループ X_1 は消滅し，逆にカテゴリーⅣの場合には，集団全体がグループ X_1 となる．

2．カテゴリーⅡとⅢ　$a_1 a_2>0$ の場合，$a_1 x_1-a_2 x_2=0$ となるのは，$x_1=\lambda=\dfrac{a_2}{a_1+a_2}$ のときで，この値を境に $\dot{x}$ の符号が変化する．$a_1>0$ かつ $a_2>0$ のケース (カテゴリーⅡ) では，初期値 x_1^0 が λ より小さければ x_1 は減少し，逆に初期値 x_1^0 が λ より大きければ x_1 は増加する．つまり，x_1 は消滅に向かうか，それとも集団全体をとなるかのいずれかである．$a_1<0$ かつ $a_2<0$ のケース (カテゴリーⅢ) でも同様に，λ を境に $\dot{x}$ の符号が変化する．けれども，初期値 x_1^0 が λ より小さければ x_1 は増加し，逆に初期値 x_1^0 が λ より大きければ x_1 は減少する．このケースにおいてのみ，x_1 は混合戦略均衡 λ に収束する．

例 1：拙稿 (2010) で模倣ダイナミクスを適用した自動車利用とバス利用の場合について，レプリケーターダイナミクスを当てはめてみる．自動車，バス利用者の利得が表 1 (現在の交通施策での利得) と表 2 (公共交通の利便性増加の周知) ときである．

8)　J. W. Weibull (1995) pp. 74−76 を参照．

表 1　現在の交通施策での利得

	自動車	バス
自動車	−0.5	6.2
バス	−6.2	0

表 2　公共交通の利便性増加の周知

	自動車	バス
自動車	−0.5	0.2
バス	−0.2	0

模倣ダイナミクスでは，表 1 の場合常に自動車利用の増加が起り，最終的には自動車だけの利用に帰着することが，表 2 の場合には自動車とバスの一定の割合 (混合戦略均衡) に収束することが予測された．これをレプリケーターダイナミクスととらえてみる．2 つの表を正規化した行列で表すと，表 1，表 2 はそれぞれ

$$A_1=\begin{pmatrix} 5.7 & 0 \\ 0 & -6.2 \end{pmatrix}, \qquad A_2=\begin{pmatrix} -0.3 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{pmatrix}$$

となる．行列 A_1 はカテゴリーⅣに対応し，交通手段利用が自動車という純粋戦略に収束し，行列 A_2 はカテゴリーⅢに対応し，交通手段利用が自動車とバスの一定利用割合を意味する混合戦略に収束する．この例ではレプリケーター・ダイナミクスの結果は模倣ダイナミクスによる結果と一致している．

例 2：第 5 節で検討する利得行列を $n=2$ のケースを考える．選択する立地点に応じて表 3 のように利得が得られるとする．

表 3　立地点 2 の利得行列

	立地点 1(x_1)	立地点 2(x_2)
立地点 1(x_1)	1	$1+a$
立地点 2(x_2)	$1+a$	1

利得行列を正規化すると，$A=\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ となる．$a>0$ の場合，カテゴリーⅢのケースになる．$x_1=\lambda=\dfrac{1}{2}$ となって，$(x_1, x_2)=\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ が進化均衡となる．$a<0$ の場合はカテゴリーⅡのケースになる．このときは(1, 0) または (0, 1) が進化均衡となる．

3　レプリケーター・ダイナミクスと漸近安定性

本節ではレプリケーター・ダイナミクスの平衡点とリヤプノフの漸近安定性との関連を説明する．第 2 節で見たようにレプリケーター・ダイナミクスの進化的均衡は，解が平衡点である

ことのほかに漸近安定性であることを求める．

はじめに漸近安定性の概念について簡単に触れ，そのためのリヤプノフの安定条件を掲げる．

動学方程式

$$\dot{x}=f(x) \tag{8}$$

において $f(x)=0$ を満たす $\hat{x}$ が平衡 (均衡) 点である．平衡 (均衡) 点 $\hat{x}$ は，(8) の解軌道が $\hat{x}$ の近くにとどまるとき $\hat{x}$ は安定，(8) の解軌道が $\hat{x}$ に近づくとき $\hat{x}$ は漸近安定と呼ばれる．リヤプノフの安定性定理はつぎのように知られている[9]．

定理 3.1 (リヤプノフ安定) $\hat{x}\in W$ を (8) の平衡点とする．$V: W\to R$ は $\hat{x}$ のある近傍 $U\subset W$ 上の連続関数で，$U-\hat{x}$ で微分可能であり，次の条件 (a)，(b) を満たすものとする：

(a) $V(\hat{x})=0$ かつ $x\neq\hat{x}$ に対して $V(x)>0$；

(b) $U-\hat{x}$ 上で $\dot{V}\leq 0$.

このとき $\hat{x}$ は安定な平衡点である．さらに次の条件

(c) $U-\hat{x}$ 上で $\dot{V}<0$

が満たされるときは $\hat{x}$ は漸近安定な平衡点となる．

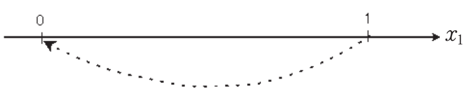
(a)，(b) を満たす関数 V はリヤプノフ関数，さらに (c) を満たす場合を狭義のリヤプノフ関数と呼ばれる．

第 2 節の対称 2×2 ゲームの場合，安定な定常解が漸近安定であることは，リヤプノフ関数をまたずに容易に確認される．戦略変数が x_1 と x_2 の 2 つで $x_1+x_2=1$ であることから，式 (7) は

$$\dot{x}_1=\left\{a_1x_1-(1-x_1)a_2\right\}x_1(1-x_1)$$

と x_1 だけの 1 変数の微分方程式に変形される．位相図は a_1，a_2 の符号によって分類される．カテゴリーⅠの場合，$a_1<0$，$a_2>0$ なので x_1 の漸近安定点は $x_1=0$ である．なぜなら右辺の中括弧の中が負なので，右辺は $x_1\in(0,1)$ において負となるからである．位相図を描くと，図 1 のように x_1 が 0 に収束する．

図 1　x_1 の位相図：カテゴリーⅠの場合

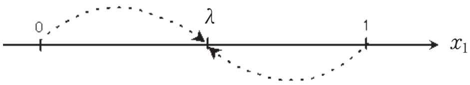


9)　M. W. ハーシュ，S. スメール (1976) p. 206 を参照

したがって進化的均衡は $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)=(0, 1)$ となる．

カテゴリーⅢの場合，$a_1<0$，$a_2<0$ なので右辺の中括弧の式が $(a_1+a_2)\left(x_1-\dfrac{a_2}{a_1+a_2}\right)$ となり，$\lambda\equiv\dfrac{a_2}{a_1+a_2}$ を境に右辺の符号が変わる．初期値 x_1^0 が λ より小さければ正，λ より大きければ負となる．

図 2　x_1 の位相図：カテゴリーⅢの場合



したがって進化的均衡は $(\lambda, 1-\lambda)$ となる．カテゴリーⅡ，Ⅳの場合も同様にして示される．

けれども戦略数 n が 3 以上になると，$n=3$ の場合には変数を 1 つ減らして 2 次元の位相図を描くことで分析は可能であるが，一般には位相図によって分析することは可能ではない．それに代わるものが定理 3.1 のリヤプノフ関数によって (4) の平衡解の中で漸近安定な解を求めることである．進化的安定状態と漸近安定性に関する命題としてつぎのような定理[10)] がある．

定理 3.2

もし $\hat{x}\in\Delta$ が利得行列 A のゲームの進化的安定状態であるならば，それは (4) の漸近安定な平衡点である．

定理 3.2 の証明のなかで J. Hofbauer and K. Sigmund (1998) は，x に関する関数が狭義のリヤプノフ関数ならば $\hat{x}$ が進化的安定，つまり進化的均衡であることを示している．しかも $\hat{x}$ が Δ の内部で進化的安定ならば，(4) の大域的に安定な平衡点であることも指摘している．以下では平衡点 $\hat{x}$ の漸近安定の分析から $\hat{x}$ の進化的安定状態を確認する．

例 3：例 2 で検討した利得行列が 3×3 の場合を考察する．これは，立地点が 1, 2, 3 で，立地点の選択が表 4 のような利得行列をもたらす場合である．なお，ここでは $a>0$ とする．

表 4　立地の利得行列：3×3 の場合

	立地点 1	立地点 2	立地点 3
立地点 1	1	$1+a$	$1+a$
立地点 2	$1+a$	1	$1+a$
立地点 3	$1+a$	$1+a$	1

10)　J. Hofbauer and K. Sigmund (1998) pp. 70−71 参照.

すなわち，$A=\begin{pmatrix} 1 & 1+a & 1+a \\ 1+a & 1 & 1+a \\ 1+a & 1+a & 1 \end{pmatrix}$ とする．

x_1，x_2，x_3 のレプリケーター・ダイナミクスは次のようになる．

$$\dot{x}_1=x_1\left\{x_1+(1+a)x_2+(1+a)x_3-xAx\right\} \tag{9}$$

$$\dot{x}_2=x_2\left\{(1+a)x_1+x_2+(1+a)x_3-xAx\right\} \tag{10}$$

$$\dot{x}_3=x_3\left\{(1+a)x_1+(1+a)x_2+x_3-xAx\right\} \tag{11}$$

なお，xAx は

$$xAx=1+2a(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) \tag{12}$$

である．

ところで関数 $\log(x_1x_2x_3)$ は連続関数なので，単体 Δ (コンパクト集合) 上で極大値をもつ．そのときの x を $\hat{x}$ とおく．

いま x の関数として

$$v(x)=\log(x_1x_2x_3)-\log(\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3) \tag{13}$$

を作る．$x\in\mathrm{int}\Delta$ のとき

$$v(x)<0 \quad x\neq\hat{x} \tag{14}$$

である．ただし，等号が成り立つの $x=\hat{x}$ のときである．時間 t に関して $v(x)$ を微分すると

$$\dot{v}(x)=\frac{\dot{x}_1}{x_1}+\frac{\dot{x}_2}{x_2}+\frac{\dot{x}_3}{x_3}$$

である．これに (9) から (12) を代入して整理すると，

$$\dot{v}=a\left\{(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_3)^2\right\} \tag{15}$$

を得る．右辺の中括弧の式の符号は，$x_1=x_2=x_3$ を除いて正であることがわかる．したがって $\dot{v}\geq 0$ である．平衡点は (15) の右辺がゼロのときであるので，$x_1=x_2=x_3$ となる．しかも $x\in\Delta$ なので $\hat{x}_1=\hat{x}_2=\hat{x}_3=\dfrac{1}{3}$ となる．関数 $-v(x)$ は，$x=\hat{x}$ において $-v(x)=0$ で $x\neq\hat{x}$ に対して $-v(x)>0$ である．しかも $\Delta-\hat{x}$ 上で $-\dot{v}(x)<0$ ($x\neq\hat{x}$ のとき) となる．よって関数 $-\dot{v}(x)$ は狭義のリアプノフ関数である．平衡点 $\left(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3\right)=\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ は漸近安定である．したがって混合戦略 $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ は進化的安定状態または進化的均衡である．

4　立地選択行動とレプリケーター・ダイナミクス

前節ではレプリケーター・ダイナミクスの進化的均衡 (進化的安定状態) と漸近安定性との関連を概観するとともに例を掲げて平衡点の漸近安定性を検討した．例 2，例 3 は第 5 節で検討する利得行列の 2×2，3×3 ケースである．これらの例が第 5 節の分析のための予備的な考察である．本稿の目的は，例 2，例 3 を拡張した n 次の利得行列のもとで集団全体からみた混合戦略としての立地均衡が進化的均衡として存在することを証明することである．第 5 節でこの証明を行う．本節では利得にもとづく立地選択行動とレプリケーター・ダイナミクスの類似性を検討する．

均衡立地状態では消費者や生産者は立地点に関係なく同一の効用，同一の利潤を獲得する．その均衡状態に至る立地選択行動においては消費者は自らにとって最大効用もたらす居住地点を選択し，生産者は最大利潤をもたらす生産地点を選択しようとする．拙稿 (2008) ではそうした消費者，生産者の主体的行動から競争均衡としての均衡立地が形成される (存在する) ことを示した．その立地選択行動の基準が，消費者の場合は平均効用からの差であり，生産者の場合は平均利潤からの差であった．すなわち

$$\begin{aligned} &\text{超過効用} = \text{効用} - \text{平均効用 (消費の場合)} \\ &\text{超過利潤} = \text{利潤} - \text{平均利潤 (生産の場合)} \end{aligned} \tag{16}$$

であった．現在の立地点からの効用 (利潤) が全地点にわたっての効用 (利潤) の平均に対する差が経済主体に対してより良い立地選択を求める行動に駆り立てる．つまり立地選択行動のエンジンが平均効用，平均利潤からの差である．この差が立地点ごとの人口シェア (消費者，生産者) につながっている[11)]．

一方，レプリケーター・ダイナミクスは進化ゲーム理論の主要な領域として発展している．一般にゲーム理論の場合，それは個別主体の 1 対 1 の対戦ゲームとして個別主体の戦略選択問題として展開されるが，レプリケーター・ダイナミクスの場合，大集団のなかからランダムに選出されたプレーヤーが純粋戦略を選択していくときグループのシェア (割合) がどのように進展していくかを分析する．ランダムにピックアップされた主体 (親) が戦略 i を選択するグループに属しておれば，その主体は戦略 i を選択するだけである．通常のゲーム理論では混合

11)　拙稿 (2007) では，超過効用，超過利潤からの差のベクトルと人口シェアとの間の対応を作成し，最終的には角谷の不動点定理によって立地均衡の存在を証明している．

戦略という選択肢があるけれども，レプリケーター・ダイナミクスでは個別主体には純粋戦略の選択しかない．けれどもレプリケーター・ダイナミクスは，グループのシェアの動きに注目して集団全体のなかでダイナミクスの行き着く先の均衡におけるグループ間シェアを分析する．グループ間シェアがちょうどゲーム理論での個別主体の混合戦略に対応する[12)]．

進化ゲームは数理生態学 (生物学) の分野で発展した理論なので，レプリケーター・ダイナミクスも元来生物の増減現象に関するダイナミクスとしてグループの特性を受け継ぐ子の増減を通してグループシェアの変化を捉えようとする．これに対して拙稿 (2008) では超過効用，超過利潤が主体の地域間移動，すなわち，立地点 (戦略) を変更して人口シェアの変化を捉えている．レプリケーター・ダイナミクスの場合，ランダムにピックアップされた主体 (親) が戦略 i を選択するグループに属しておれば，その主体は戦略 i を選択し，その適応度の結果として子を生み出す．親が子を複製していく．これをダイナミクスとして表現したのがレプリケーター (自己複製子)・ダイナミクス (1) または (3) である．全体平均から期待値の乖離する差がそのグループのシェア (割合) の増減につながるという式 (1) の考え方は，上記の平均効用あるいは平均利潤からの差が立地点選択の行動に消費者，生産者を駆り立て結果として各地点での人口シェアの変化につながるというメカニズムと同じである．この点において立地選択行動のエンジンとレプリケーター・ダイナミクスは類似性をもつ．相異点がレプリケーター・ダイナミクスの場合，(3) によって記述されるダイナミクスがそのグループの子の増減の増減を通してグループシェアの増減をあらわすのに対して，拙稿 (2008) では超過効用，超過利潤が主体の地域間移動，すなわち，立地点 (戦略) を変更して人口シェアの変化を捉えていることである．この点からすれば学習ダイナミクス (試行錯誤ダイナミクス，模倣ダイナミクス，最適反応ダイナミクスなど) によって分析するのが適切かもしれない．しかしながら，ここでは人口シェアを引き起こすエンジン (16) とレプリケーター・ダイナミクス (1) の類似性に着目して，レプリケーター・ダイナミクスとして立地均衡分析を行うことを試みる．そのために (1) あるいは (3) を主体の立地選択が引き起こすグループシェアのダイナミクスと読み替える．

5　レプリケーター・ダイナミクスのもとでの「均等」立地均衡

第 3 節の例 2，例 3 では，利得にかかわる係数が $a>0$ の場合，人口は地域間で均等分布す

12)　J. Hofbauer and K. Sigmund (1998) ではレプリケーター・ダイナミクスの安定な定常解を進化的安定混合戦略ではなく進化的安定状態と呼んでいる．

ることが進化的均衡であることがわかる．これは利得行列を見るとわかるように，ランダムにピックアップされた主体が同じグループの場合に利得が 1 で，他のグループの主体と対峙したときに $1+a$ となっていて，各立地点は互いに同じ期待利得を得ることができる構造になっている．それゆえ推察されることは，(表 3)，(表 4) のような利得構造の場合には，人口の均等分布，あるいは人口が均等に立地することである．当然，立地点ごとに異なる利得構造を与えるならば，人口の均等分布とは異なる人口分布が発生すると考えられる．本節ではレプリケーター・ダイナミクスに基づく立地均衡分析の第 1 次的接近として (表 3)，(表 4) の一般化形で分析を行う．以下では，期待利得が立地点に関係なく等しい場合，均等立地均衡が進化的安定となること (定理 5.3) を導びく．

　ある有限で大きな人口 P が 1, 2,$\cdots$, n の地点に立地する．立地点 i を選択する人口を P_i とすると，

$$P=\sum_{i=1}^{n}P_i$$

である．これを全体の人口 P で割って人口シェア (割合) の式にすると，$1=\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i}{P}$ となる．地点 i を選択する人口シェア x_i を $x_i\equiv\frac{P_i}{P}$ とするならば，

$$1=\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{17}$$

となる．これが (混合戦略) 単体である．すべての立地点の人口シェア分布を記述するベクトルを x であらわす．すなわち，$x\equiv(x_1, x_2,\cdots, x_n)$ とする．立地点 i ($i=1, 2,\cdots, n$) で期待される利得が表 5 のように表されるものとする．ただし $a>0$ とする．

表 5　立地点での利得

	立地点 1	立地点 2	$\cdots$	立地点 n
立地点 1	1	$1+a$	$\cdots$	$1+a$
立地点 2	$1+a$	1	$\cdots$	$1+a$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
立地点 3	$1+a$	$1+a$	$\cdots$	1

　表 5 の利得を行列として表したものを A とおく．

$$A\equiv\begin{pmatrix}1 & 1+a & \cdots & 1+a\\ 1+a & 1 & \cdots & 1+a\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1+a & 1+a & \cdots & 1\end{pmatrix} \tag{18}$$

立地点 i に立地することで得られる期待利得は行列 A の第 i 行と x との内積で表される．これは立地点 i の主体が立地点 $1, 2, \cdots, n$ の主体に遭遇する確率は人口分布 x に等しいと考えるのが妥当だからである．立地点 i での期待利得を $(Ax)_i$ として表すると，次のようになる．

$$(Ax)_i = x_i + (1+a)\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_j$$

期待利得の平均が xAx である．xAx は次のような式になることがわかる．

補題 5.1　期待利得の平均 xAx は

$$xAx = 1 + 2a\sum_{i<j}^{n} x_i x_j \tag{19}$$

である．

(証明)

帰納法で証明する．

(ⅰ) $k=2$ のとき，すなわち，立地点の数が 2 のとき

$$\begin{aligned} xAx &= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 1+a \\ 1+a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} x_1 + (1+a)x_2 \\ (1+a)x_1 + x_2 \end{pmatrix} \\ &= 1 + 2ax_1x_2 \end{aligned}$$

となって，$k=2$ のときに成り立つ．

(ⅱ) つぎに $k=n$ のケースを検討する．$k=n-1$ のとき，すなわち，立地点が $n-1$ のとき

$$\begin{aligned} xAx &= 1 + 2a\sum_{i<j}^{n-1} x_i x_j \qquad (20) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (x_i)^2 + 2(a+1)\sum_{i<j}^{n-1} x_i x_j \end{aligned}$$

が成り立つと仮定する．

n のときの期待利得の平均値は

$$xAx = (x^{n-1}, x_n)\begin{pmatrix} A_{n-1} & 1+a \\ 1+a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

と表現される．ただし，x^{n-1} は n 次元ベクトルの要素 x_1 から x_{n-1} なるベクトルであり，A_{n-1} は n 次元正方行列 A の $n-1$ 次元主座小行列である．また x の x_n を要素として $n-1$ 個並べた $n-1$ 次元列ベクトルを $\bar{x}^{n-1}$ とおく．

$$xAx=(x^{n-1},\ x_n)\begin{pmatrix} A_{n-1}x^{n-1}+(1+a)\bar{x}^{n-1} \\ (1+a)\sum_{i=1}^{n-1}x_i+x_n \end{pmatrix}$$

$$=x^{n-1}Ax^{n-1}+(1+a)x^{n-1}\bar{x}^{n-1}+x_n\left\{(1+a)\sum_{i=1}^{n-1}x_i+x_n\right\}$$

式 (20) を代入すると

$$=\sum_{i=1}^{n-1}(x_i)^2+2(1+a)\sum_{i<j}^{n-1}x_ix_j+2(1+a)x_n\sum_{i=1}^{n-1}x_i+(x_n)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2+2(1+a)\sum_{i<j}^{n}x_ix_j$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2-2\sum_{i<j}^{n}x_ix_j+2(1+a)\sum_{i<j}^{n}x_ix_j$$

また (17) から

$$=1+2a\sum_{i<j}^{n}x_ix_j$$

となる．

(証明終り)

補題 5.2　$x_i>0$，$\sum_{i=1}^{n}x_i=1$ のとき，関数 $\log\left(\Pi_{i=1}^{n}x_i\right)$ は $\hat{x}=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}\right)$ において極大値 $n\log\frac{1}{n}$ をもつ．

(証明)

$\log\left(\Pi_{i=1}^{n}x_i\right)$ は x に関して連続であるのでコンパクトな領域 Δ で必ず極大値をもつ．そこでラグランジュ関数 $L=\log\left(\Pi_{i=1}^{n}x_i\right)-\lambda\left(1-\Sigma_{i=1}^{n}x_i\right)$ を作る．ただし λ はラグランジュ乗数である．一階条件を求めると

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=\frac{1}{x_i}-\lambda=0\ \ (i=1,\cdots,n)$$

$$1=\sum_{i=1}^{n}x_i$$

これらの式から極値をもたらす x は $x_i=\frac{1}{n}$，$(i=1,\cdots,n)$ となる．$\frac{\partial L}{\partial x_i}$ をさらに x_j $(j=1,\cdots,n)$ で微分してヘッシアン行列を求めると，主対角成分が $-x_i^{-2}(i=1,\cdots,n)$ で，他の成分が 0 である．よってヘッシアン行列は負値定符号なるので，$x_i=\frac{1}{n}(i=1,\cdots,n)$ において極大値をもつ．

(証明終り)

定理 5.3　n 次元利得行列 A が (18) で，$a>0$ ならば，$x=\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right)$ は進化的均衡 (進化的安定状態) である．

(証明)

　A のレプリケーター・ダイナミクスは

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1\left\{x_1+(1+a)\sum_{k=1,\,k\neq 1}^{n} x_k - xAx\right\} \\
\dot{x}_2 &= x_2\left\{x_2+(1+a)\sum_{k=1,\,k\neq 2}^{n} x_k - xAx\right\} \\
&\ \vdots \\
\dot{x}_n &= x_n\left\{x_n+(1+a)\sum_{k=1,\,k\neq n}^{n} x_k - xAx\right\}
\end{aligned} \tag{21}$$

である．関数 $v(x)$ を $v(x)\equiv\log\left(\Pi_{i=1}^{n} x_i\right)-n\log\frac{1}{n}$ と定義する．すると補題 5.2 から $x\in\Delta$ において $\log\left(\Pi_{i=1}^{n} x_i\right)$ が $\hat{x}=\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right)$ で最大値をもつので，$v(x)$ の性質として

$$v(x)\leq 0 \quad (x\in\Delta \text{ のとき}, \qquad v(x)<0 \quad (x\neq\hat{x} \text{ のとき})$$

である．$v(x)$ を時間 t に関して微分すると，

$$\dot{v}(x)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\dot{x}_i}{x_i}\right)$$

である．右辺を計算する．まずレプリケーター・ダイナミクスの式 (21) を代入して

$$\text{右辺} = \sum_{i=1}^{n} x_i + (n-1)(1+a)\sum_{k=1}^{n} x_k - n\cdot xAx$$

(17) と補題 5.1 の (19) を代入して

$$= (n-1)a - 2na\sum_{i<j}^{n} x_i x_j$$

さらに (17) から

$$= a\left\{(n-1)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - 2n\sum_{i<j}^{n} x_i x_j\right\}$$

$$= a\left\{(n-1)\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - 2\sum_{i<j}^{n} x_i x_j\right\}$$

$$= a\left\{\sum_{i<j}^{n}(x_j - x_i)^2\right\}$$

となる．したがって

$$\dot{v}(x)=a\left\{\sum_{i<j}^{n}(x_j-x_i)^2\right\} \tag{22}$$

である．$a>0$，中括弧の中の式も非負なので，$\dot{v}(x)\geq 0$ ($x\in\Delta$ のとき)，$v(x)>0$ ($x\neq\hat{x}$ のとき) である．したがって $-v(x)$ は，

$$-v(x)>0,\ \text{かつ}\ -\dot{v}(x)<0 \qquad (x\neq\hat{x}\ \text{のとき})$$

という性質を有する．定理 3.1 より関数 $-v(x)$ は狭義のリヤプノフ関数であり，(22) の平衡点は漸近安定である．(22) の右辺が 0 であるためには，$(x_j-x_i)^2=0$ でなければならない．よって $x_1=x_2=\cdots=x_n$ である．これを (17) に代入すると

$$x_i=\frac{1}{n}\ (i=1, 2,\cdots, n)$$

が得られる．$x=\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n},\cdots, \frac{1}{n}\right)$ がレプリケーター・ダイナミクスの漸近安定な平衡点なので，$x=\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n},\cdots, \frac{1}{n}\right)$ は進化的均衡 (進化的安定状態) である．

(証明終り)

6 結 び

本稿では，定理 5.3 として各地点での期待利得が立地点に関係なく等しいという仮定のもとで「均等」立地均衡が進化的均衡 (進化的安定状態) になることを示した．経済主体が表 5 のような利得を得るならば，レプリケータ・ダイナミクスによって人口が均等に立地する状態が均衡状態であって，人口分布が均衡でない状態から始まったとしても均等に分布する均衡状態に収束すること (漸近安定) を明らかにした．つまり，本稿で設定した利得行列ならば，進化的安定点が単体 Δ の内点 $x=\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n},\cdots, \frac{1}{n}\right)$ として導かれることを示した．この分析自体は経済主体の立地に限ったものでなく，異なる特性をもつ集団 (動物，社会的グループ) の均衡状態への収束としても読み替えることは可能である．本稿で仮定した利得行列を持てば，ある集団で異なる特性をもつグループが均等に共存する均衡状態が生まれると理解することもできる．この意味では一般的である．しかしながら本稿の分析は立地という点では特定化されていないという点で進化ゲームによる立地分析への第 1 次的接近であって，拡張すべき点，さらに検討すべき課題は残されている．

その 1 つが期待利得が立地点に関係なく等しくなるような利得行列 A を前提としているこ

とである．この仮定のために容易に予測されるように人口が均等に立地することが当然であったのかもしれない．この仮定を緩めて期待利得が立地点ごとに異なるケースへ分析を拡張する必要があろう．第 2 点が分析方法としてレプリケーター・ダイナミクスが適切な分析モデルかどうか，それとも模倣ダイナミクスのような学習ダイナミクスが良いのか検討すべき必要がある．地域間の人口移動を明示的に組み込むようなモデル検討する場合には模倣ダイナミクスのようなモデルが必要となる．こうした人口移動を明示的に考慮した分析はさらに意味ある分析になると考えられる．というのも本稿では利得行列 A については，アプリオリに対角要素が 1 でその他の要素が $1+a$ として分析を進めた．地域間人口移動を明示するモデルを考慮することになれば，前提とした利得行列やそれによる分析結果についてよりいっそう意味を見出すことができると考えられる．

第 3 の点がさらに重要な課題であるかもしれない．ここで検討したモデル設定は立地に限った設定ではないので，より立地を表現するような設定が必要である．拙稿 (2008) はワルラス競争均衡としての立地均衡の存在問題を扱ったが，本稿では経済主体のインセンティブもとづいた利得を捨象してレプリケーター・ダイナミクスによって「均等」立地は進化的均衡であることを示した．本稿での分析は上述のように立地に限らず，他の現象への読み替えは可能である．そういう意味では一般的だが，ワルラス均衡との密接な形で拡張を図ろうとするならば，経済主体の行動原理に基づいて導かれた立地選択行動の指標，それによる地域間の人口移動を組み込んだモデルを検討する必要がある．

参 考 文 献

[1] Hirsh, M. W. and S. Smale (1974) Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra, Academic Press. (M. W. ハーシュ，S. スメール，田村一郎他 2 名 (訳) (1976)『力学系入門』岩波書店).

[2] Hofbaur, J., P. Schuster and K. Sigmund (1979) ‘A Note on Evolutionary Stable Strategies and Game Dynamics’, *Journal of Theoretical Biology*, Vol 81, pp. 609–612.

[3] Hofbaur, J. and K. Sigmund (1998) *Evolutionary Games and Population Dynamics*, Cambridge UP.

[4] Maynard Smith and G. R. Price (1973), ‘The Logic of Animal Conflicts’ *Nature* 246, pp. 15–18.

[5] Maynard Smith, J., (1982) *Evolution and Theory of Games*, Cambridge UP. (J. メイナード–スミス　寺本英，梯正之 (訳) (1985)『進化とゲーム理論－闘争の論理－』産業図書).

[6] Monet, C. and D. Serra (2003) *Game Theory & Economics*, Palgrave Macmillan.

[7] Strszheim, M., (1987) 'The Theory of Urban Residetial Location' in *Handbook of Regional and Urban Economics*, North-Holland. pp. 717−757.

[8] Vega-Redondo, F. (1997) 'The Evolution of Walrasian Behavior', *Econometrica*, vol. 65, No. 2, pp. 375−384.

[9] Vega-Redondo, F. (2003) *Economics and the Theory of Games*, Cambridge UP.

[10] Weibull, J. W. (1996) *Evolutionary Game Theory*, MIT Press. (J. W. ウェイブル，大和瀬達二 (監訳) (1998) 『進化ゲームの理論』 文化書房博文社).

[11] 大浦宏邦 (2008) 『社会科学者のための進化ゲーム理論－基礎から応用まで』 勁草書房.

[12] 慶田 (2006)「選択可能な経済が環境のもとでの市場均衡」『熊本学園大学 経済論集』 第 12 巻第 3・4 合併号, pp. 1−28.

[13] 慶田 (2008)「選択可能な経済が環境のもとでの市場均衡－生産と消費からなる経済の場合－」『熊本学園大学 経済論集』 第 14 巻第 1・2・3・4 合併号, pp. 1−39.

[14] 慶田 (2010)「熊本都市圏の地域公共交通と交通需要者選択行動」『グローバル化する九州・熊本の産業経済の自立と連携』 の第 2 部地域第 8 章より , 熊本学園大学付属産業経営研究所, pp. 325−351.

Summary

Stability of Equally Located Equilibrium Based on Replicator Dynamics

It is expected that people locate at each district according to its attractiveness when people locate or live in different districts. As the first approach to this proposition this paper shows that people locate at each district in equal size as a stable equilibrium if each district is preferable equally for all the people. To this purpose we try to prove Theorem 5.3 that the stationary state of replicator dynamics evolutionary stable state by using replicator dynamics in the field of mathematical biology.