

模倣ダイナミクスにもとづく立地

慶 田 收

概 要

模倣ダイナミクスにもとづく立地を考察する。各立地点に立地する主体がランダムにマッチングするときの期待利得を比較してより大きな利得をもたらす立地点に移動するという定式化のもとで、混合戦略状態としての動学の平衡点が進化的安定戦略状態であることを示す。利得行列の主対角要素の大小関係を明示すると、その要素の大きさに従って立地点の人口シェアが決まることを明らかにする。また、立地点間に強支配関係があるような場合には被支配地点は人口シェアを減少させていき、そして1つの地点によってほかの地点が支配されるような場合、強支配の地点への人口の一極集中現象が説明される。

1 はじめに

レプリケーター・ダイナミクスは、集団間の比率の動きを通して集団の規模変化をとらえる。ランダムに選択された2主体(個体)が純粋戦略を用いてマッチングすることで主体は利得を得る。利得は適応度すなわち主体(親)の性質を受け継ぐ子供の数を表す。これがそれぞれの戦略を用いる集団の規模の変化へとつながる。拙稿(2011)ではこのレプリケーター・ダイナミクスを立地問題に応用し、人口の均等立地状態を明らかにした。問題は立地点の魅力に応じてどのように人口数の変化に至るかを説明するメカニズムが足りなかった。なぜならばゲームの利得を立地点の人口数の変化としていたからである。本稿ではこの問題に対処するために社会的集団グループの変化をとらえる1つの方法である模倣ダイナミクスによって分析をおこなう。

模倣ダイナミクス(Imitation dynamics)については、Samuelson and Zhang (1991), Hofbauer and Sigmund (1996), (2003) や Weibull (1996) をはじめとして数多くの先行研究がある。プレイヤーは集団の中から一定の時間間隔でランダムに選ばれた他のプレイヤーとマッチングして自らの戦略を行使して利得を得る。その利得が他の戦略からの利得と比較して劣る

ような場合、より大きな利得を得るために他のプレイヤーの戦略を模倣する。より良い戦略を模倣することによって戦略を模倣されるグループの個体数は増加し、逆に劣る戦略のグループはその個体数を減少させる。これをモデル化したものが模倣ダイナミクスである。

本稿では模倣ダイナミクスを立地問題に適用する。各立地点に立地する主体同士がランダムにマッチングするときの利得が第3節の利得行列(5)のケースであるときは、混合戦略状態としての平衡点が進化的安定戦略状態(ESS)になることを明らかにする。利得行列の対格要素は立地点それ自身の魅力度を表すと考えることができ、その大きさに応じて立地点の人口シェアが決まることをみる。その分析結果が第3節の定理2であり、第4節の性質1である。

こうした安定状態に至るまでには、都市の生成・消滅が繰り返される。一般に都市は経済的、社会的、その他の理由によって重要性あるいは魅力度を増すことで都市規模を増大させる。それは多くの場合人口の変化となって現れる。逆に都市が重要性(魅力度)を失うと、都市規模(人口)は減少していく。いかなるケースでも他の都市に対して魅力度を失うような都市の場合、人口が流出してやがては都市の消滅に至る可能性がある。新経済地理学において都市の生成・発展・消滅を明らかにした優れた研究がある。Fujita and Mori (1996) や藤田、クルーグマン、ペナブルズ(2000)等は、Dixit-Stiglitz タイプの収穫逡増関数を用いて都市または港湾都市が階層的に生成・消滅することを分析している。そこでは輸送費用や代替パラメーターが重要な役割をもち、輸送費や代替パラメーターの異なる工業部門をもつ地域が「より高次の都市」あるいは「より低次の都市」に階層化されることを明らかにしている。

本研究は進化ゲームによるアプローチを用いて強支配の概念にもとづく分析をおこない、新経済地理学の研究とは次の点で異なる。新経済地理学では財の生産・消費にもとづいた都市間での優位性の分析により生成・消滅を明らかにするのに対して、本稿では各立地点の優位性を外生に与えられた利得行列によって分析している。この点において新経済地理学は経済的な論理に基づいて都市の生成・消滅を説明する。本稿はそうした論理を省略した点で改善の余地が残るが計算が大幅に簡略化されて都市の消滅に関する分析が簡単になる。

本稿では、強支配の繰り返しによって極限の戦略的安定状態に至る過程の現象として立地点の消滅が起こることを説明する。ゲーム理論では自らの選択可能な戦略 A, B の中で対戦相手のどのような戦略に対しても、戦略 A が B よりもより大きな利得をもたらす場合、戦略 B は戦略 A に支配されるというが、進化ゲームの場合も想定されるいかなる状況のなかでも他の戦略に対して期待利得が劣る戦略は支配されるという。とくに利得の大小関係が等号を含まない場合を強支配と言っている。立地問題に当てはめると、立地点間にわたるどのようなシェアをとってみてもある地点での期待利得が、他の立地点からの期待利得より必ず劣るような場

合が、その立地点は強支配されるといえる。強支配される都市はおのずと自らの人口シェアを低下させ、極限状態として都市の消滅につながるという。この強支配にもとづいて立地を考察することはもう一つの目的である。この分析結果が性質 2、性質 3 として導かれる。

本稿の構成は次のとおりである。第 2 節で立地問題を模倣ダイナミクスとして構成し、第 3 節で混合戦略状態としての平衡点が進化的安定戦略状態になることを示す。第 4 節では利得行列の対角要素に大小関係に応じた人口シェアが決まることを示し、そのあと強支配にもとづく立地を考察する。第 5 節で分析結果を確認し、今後の課題を提示して本稿を締めくくる。

2 模倣ダイナミクスにもとづく立地の定式化

レプリケーター・ダイナミクスは、本来生物集団の個体数の動学的な動き、その平衡点をとらえようとしたものである。これを社会的集団に適用して、例えば人々の集団がいくつかの地点に分かれて立地するとき、立地点の人口シェアの動学的な動きを分析しようとする、次のようになる。

n 個からなる地点の全人口を X 、地点 i の人口を X_i として、全人口に対する地点 i の人口シェアを x_i で表し、人口シェアベクトルを $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ とする。地点 i の主体がランダムに選ばれた他の主体と対峙するとき、地点 i の主体の期待値 $u(e^i, x)$ は人口シェア分布 x のもとで純粋戦略 i (この場合、地点 i 選択すること) を用いるときの期待人口変動数を表す。ここで e^i は第 i 成分が 1 で他の成分が 0 となる n 次元単位ベクトルである。言い換えると、 $u(e^i, x)$ は転入あるいは転出によって生じる地点 i の期待人口変動数を表す。期待人口変動数 $u(e^i, x)$ が期待人口変動数の平均 $\sum_{j=1}^n x_j(t) u(e^j, x)$ より大きければ地点 i の人口シェアが増加し、逆に小さければ地点 i の人口シェアは減少して、立地における人口変動を説明することになる。

けれどもなぜ人は立地の場を求めて主体が移動するのかという問に対して、レプリケーター・ダイナミクスの直接的な適用は何も答えていない。一般に経済主体が移動する動機としては、より大きな所得あるいは利潤をもたらすとか、より望ましい生活環境を享受できるとかといった便益あるいは効用である。そこで本節ではランダムに選ばれた 2 人がマッチングするときの利得を集団人口そのものの個体数ではなく「効用」としてとらえて、効用に基づいて移動する人口の動き、つまり、立地点の人口シェアの動学を模倣ダイナミクスによって検討する。したがって以下では、 $u(e^i, x)$ は地点 i の主体が得ることのできる期待効用、 $\sum_{j=1}^n x_j(t) u(e^j, x)$ は期待効用の平均を表すものとする。

経済主体が移動を検討する基準として現在の立地点での期待効用が期待効用の平均 (すべての立地点からの効用の平均値) より大きいかどうかによるものと仮定する. すなわち

$$\begin{aligned} u(e^i, x) &> \sum_{j=1}^n x_j(t) u(e^j, x) && \text{他の地点から地点 } i \text{ に移動する} \\ u(e^i, x) &< \sum_{j=1}^n x_j(t) u(e^j, x) && \text{地点 } i \text{ から他地点に移動する} \end{aligned} \tag{1}$$

ことである. 移動する人口数は各地点の人口規模に比例すると仮定する. いま時点 t での地点 i の人口規模を $X_i(t)$ とすると, 時点 $t+\tau$ での人口規模 $X_i(t+\tau)$ は

$$X_i(t+\tau) = X_i(t) + \alpha\tau X_i(t) \left\{ u(e^i, x) - \sum_{j=1}^n x_j(t) u(e^j, x) \right\}$$

となる. α は $\alpha > 0$ で, 戦略を見直す人の割合を表す. 時点 $t+\tau$ の人口数は時点 t の人口数 $X_i(t)$ に τ 時間に変化した人口数 $\alpha\tau X_i(t) \left\{ u(e^i, x) - \sum_{j=1}^n x_j(t) u(e^j, x) \right\}$ を加えた数である. 上の式の両辺を全体人口 $X(t)$ で割って, 人口シェアの変化をとらえると

$$x_i(t+\tau) - x_i(t) = \alpha\tau x_i(t) \left\{ u(e^i, x) - \sum_{j=1}^n x_j(t) u(e^j, x) \right\}$$

となる. ここで $\tau \rightarrow 0$ として極限をとると

$$\dot{x}_i = \alpha x_i(t) \left\{ u(e^i, x) - \sum_{j=1}^n x_j(t) u(e^j, x) \right\} \tag{2}$$

が得られる. 模倣ダイナミクス (2) はレプリケーター・ダイナミクスの式に帰着する.

このような設定は模倣ダイナミクスと呼ばれる. ここで改めて模倣ダイナミクスの一般的な定式化をおこなう¹⁾. 人間社会ではグループの構成員は同じ戦略を続けて行使するとは限らない. 絶えず他のグループ構成員との比較対照において自らの戦略を見直す. 比較参照した他のグループのほうがより望ましい利得をもたらすならば自らの戦略を変更する. つまり, より良いものを模倣 (上述の場合, 式 (1)) する. これをモデルとして定式化したものが, 模倣ダイナミクスである.

大きいが有限の集団を想定する. 純粋戦略が 1 から n まであり, 集団はこれを行行使する n 個のグループに分かれる. 時点 t で集団全体に対するグループ i に属する主体の頻度 (シェア) を $x_i(t)$ で表し, $x_1(t)$ から $x_n(t)$ を成分とするベクトルを $x(t)$ で表す. 混乱を起こさない限りにおいて $x(t)$ を x と略す.

1) 以下の模倣ダイナミクスの導出は, Hofbauer and Sigmund (2003) pp. 491–493 に従う.

模倣ダイナミクスにもとづく立地

$$\sum_{k=1}^n x_k = 1,$$

である。すなわち $x \in \Delta_n$ である。 Δ_n は $n-1$ 次元単体である。 集団全体から主体 (プレーヤー) がピックアップされて戦略を見直す機会を与えられるが、必ずしも見直すとは限らない。 主体は $\alpha > 0$ の割合で自らの戦略を見直すとは仮定する。 そのとき主体はランダムに他のプレーヤー $j (j=1, \dots, n)$ をサンプリングして自らの戦略をそのまま採用するかどうかを決定する。 こうして導かれる模倣ダイナミクスは次のように示すことができる。

$$\dot{x}_i = \alpha x_i \sum_{j=1}^n (f_{ij}(x) - f_{ji}(x)) x_j \quad (3)$$

f_{ij} は戦略 j から戦略 i に転換する確率である。 x_i, x_j は集団に占めるシェアを表すととも戦略 i または j が選ばれる頻度を表す。 したがって $x_i x_j f_{ij} \tau$ は τ の時間に戦略 j から戦略 i に転換する集団割合を表す。 転換率 f_{ij} は戦略 i からの期待利得 $a_i(x)$ と戦略 j からの期待利得 $a_j(x)$ によってきまるものとする。 これを

$$f_{ij}(x) = f(a_i(x), a_j(x))$$

で表す。 ここで関数 $f(y, z)$ は模倣のルールを定める。 単純なルールは「より良いものを模倣する」ことである。 すなわち、

$$f(y, z) = 0 \quad \text{if } y < z, \quad f(y, z) = 1 \quad \text{if } y > z$$

このルールのもとでは関数 f が不連続になるので、戦略の転換率が利得の差に応じて増加するように $f(y, z) \equiv \phi(y - z)$ と設定する。

$$\dot{x}_i = \alpha x_i \sum_{j=1}^n \{ \phi(a_i(x) - a_j(x)) - \phi(a_j(x) - a_i(x)) \} x_j$$

ϕ を $\phi(z) \equiv 0 (z \leq 0 \text{ のとき})$, $\phi(z) \equiv z (z > 0 \text{ のとき})$ と定義する。 するとダイナミクスの式は

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_i \sum_{j=1}^n \alpha (a_i(x) - a_j(x)) x_j \\ &= \alpha x_i \left(a_i(x) - \sum_{j=1}^n x_j a_j(x) \right) \end{aligned}$$

となつて、レプリケーター・ダイナミクスが得られる。 戦略 i を行使するプレーヤーが戦略 j のプレーヤーとのマッチングによって得る利得が a_{ij} (定数) と表される場合には、上式は

$$\dot{x}_i = \alpha x_i \left((Ax)_i - \sum_{j=1}^n x_j (Ax)_j \right) \quad (4)$$

となる。 すなわち (1) に他ならない。 ただし、 A は a_{ij} を要素とする利得行列で

$$(Ax)_i \equiv \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = a_i(x) \text{ である。}$$

3 混合戦略状態としての立地選択の進化的安定戦略状態

ゲームの利得行列 A の対角要素が a (ただし $0 < a < 1$) で非対角要素が 1 については、混合戦略状態が進化的安定戦略 (ESS) になる²⁾。ここではその対角成分が a_i ((ii) 要素) で、その他の成分が b (ただし、 $0 < a_i < b$) であるケースについて分析する。 $a_i < b$ は、多様性のあるものがより大きな利益をもたらすという考えに基づく。例えば、M. ポーター (1992) によると産業のクラスター化がもつ多様性は、惰性、硬直性、妥協を克服し新たな企業参入や新たな方法での競争を引き起こし、イノベーションを長く持続させることができると述べている。また、人と人との接触から新たな知の創造や経済性の創出によっても利益が生み出される。たんに生産的活動にとどまらず、日常的な生活のなかでも決まりきった人よりも多くの異なる人々との交わりが人々により大きな知的刺激をもたらす、生活を豊かなものにしてくれる。このような視点から同一地点の人との接触よりも他地域の人との接触を重視して、ここでは $a_i < b$ と仮定する。本節では、こうした利得行列 A のもとで模倣ダイナミクスの混合戦略状態が ESS になることを示す。

利得行列 A の要素が定数である場合、模倣ダイナミクスは式 (2) のように表され、レプリケーター・ダイナミクスに帰着する。そのため模倣ダイナミクスの ESS の状態はレプリケーター・ダイナミクスの ESS と同じで、ESS に収束する解の経路においてその収束速度 (式 (2) の α) が異なるだけである。以下の模倣ダイナミクスでは $\alpha = 1$ と仮定して主として混合戦略状態としての平衡点が進化的安定戦略状態であることを示す。具体的には必要な関数 $V(x)$ を定義してこれがリヤプノフ関数になることを示す。

はじめに立地点を戦略とする n 次元利得行列が A で、対角要素が a_i で、非対角要素が b (ただし、 $0 < a_i < b$) であるとする。すなわち

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b & \cdots & b & \cdots & b \\ b & a_2 & \cdots & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ b & b & & a_i & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & b \\ b & b & \cdots & \cdots & b & a_n \end{pmatrix} \quad (\text{ただし } 0 < a_i < b) \quad (5)$$

とする。すると模倣ダイナミクス (4) の式は、

$$\dot{x}_i = x_i \{ (Ax)_i - xAx \} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

2) 拙稿 (2011) を参照。

として表される．また $(Ax)_i$ は戦略 i の期待利得， $(Ax)_i \equiv a_i x_i + b \sum_{j=1, j \neq i}^n x_j$ を表す．また $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Delta_n$ なので

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (7)$$

である．本節の目的は，混合戦略状態としての平衡点が進化的安定戦略状態 (ESS) であることを示すことである．これに係わるレプリケーター・ダイナミクスの平衡点の漸近安定性と進化的安定戦略状態 (ESS) の関係について次のような定理を提示する．

定理 1 戦略 \hat{x} が ESS であるための必要十分条件は，関数 $\Pi_{i=1}^n x_i^{\hat{x}_i}$ がレプリケーター・ダイナミクスの狭義の局所リアプノフ関数であること，あるいは \hat{x} の近傍のすべての $x \neq \hat{x}$ について

$$\sum_{i=1}^n \hat{x}_i (Ax)_i > \sum_{i=1}^n x_i (Ax)_i \quad (8)$$

が成り立つことである．もし $\hat{x} \in \text{int} \Delta_n$ ならば，(8) がすべての $x \in \Delta_n$ について成立する³⁾．

この定理によってダイナミクス (6) の内点としての平衡点，すなわち混合戦略状態としての平衡点が漸近安定であるかどうかを検討すれば良い．すなわち

$$(Ax)_i - xAx = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

の平衡点 \hat{x} が漸近安定であるかを調べることである．この分析結果は次のような定理にまとめることができる．

定理 2 レプリケーター・ダイナミクスの利得行列 A が (5) であるならば，混合戦略状態としての平衡点 \hat{x} ，すなわち

$$\hat{x}_i = \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^n (b - a_j)}{\prod_{j=1, j \neq 1}^n (b - a_j) + \prod_{j=1, j \neq 2}^n (b - a_j) + \dots + \prod_{j=1, j \neq n}^n (b - a_j)} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

は漸近安定である．

(証明)

証明の方針としてはダイナミクスの平衡点を求めたのち， $v(x)$ を定義してこれをもとにリアプノフ関数 $V(x)$ を設定できることを示す．

(i) レプリケーター・ダイナミクスの平衡点を求める．

3) Hofbauer and Sigmund (2003) p. 486 を参照．

式 (9) のもとで $xAx = (Ax)_1 = (Ax)_2 = \cdots = (Ax)_n$ なので

$$x_i = \frac{b-a_1}{b-a_i} x_1 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

となる. これを式 (7) とともに (9) に代入して整理すると, 平衡点 \hat{x}_1

$$\hat{x}_1 = \frac{\prod_{j=1, j \neq 1}^n (b-a_j)}{\prod_{j=1, j \neq 1}^n (b-a_j) + \prod_{j=1, j \neq 2}^n (b-a_j) + \cdots + \prod_{j=1, j \neq n}^n (b-a_j)} \quad (12)$$

を得る⁴⁾. この \hat{x}_1 を式 (11) に代入すれば, 同じように

$$\hat{x}_i = \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^n (b-a_j)}{\prod_{j=1, j \neq 1}^n (b-a_j) + \prod_{j=1, j \neq 2}^n (b-a_j) + \cdots + \prod_{j=1, j \neq n}^n (b-a_j)} \quad (i=2, \dots, n) \quad (13)$$

を得る. なお, $0 < a_i < b$ なので \hat{x}_i が正の値であることは容易にわかる.

(ii) $v(x) \leq v(\hat{x}) \quad \forall x \in \Delta_n$ を示す.

関数 $v(x)$ をつぎのように定義する.

$$v(x) = \log \prod_{i=1}^n x_i^{\hat{x}_i} \quad (14)$$

この関数が $x = \hat{x}$ において最大値をとることを示す. $v(x)$ はつぎのように変形することができる.

$$v(x) = \sum_{i=1}^n \hat{x}_i \log x_i$$

いま x_i として $x_i = x_i / \hat{x}_i$ とすると, 上式の右辺は

$$\sum_{i=1}^n \hat{x}_i \log \frac{x_i}{\hat{x}_i}$$

となる. $\log x_i$ は凹関数なので

$$\sum_{i=1}^n \hat{x}_i \log \frac{x_i}{\hat{x}_i} \leq \log \left(\sum_{i=1}^n \hat{x}_i \frac{x_i}{\hat{x}_i} \right) = \log \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) = \log 1 = 0$$

である. よって

$$\sum_{i=1}^n \hat{x}_i \log \frac{x_i}{\hat{x}_i} \leq 0$$

すなわち

4) 式 (12) 右辺の分母において $\prod_{j=1, j \neq 1}^n (b-a_j)$ は $\prod_{j \neq 2}^n (b-a_j)$ であるが, 他の項の表記と合わせるためにこのような記述をした.

$$\sum_{i=1}^n \hat{x}_i (\log x_i - \log \hat{x}_i) \leq 0$$

となる。したがって $v(x) \leq v(\hat{x})$ である。

(iii) $x \in \Delta_n$ かつ $x \neq \hat{x}$ のとき $\dot{v}(x) > 0$ であること

$v(x)$ を時間 t に関して微分する。

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= \frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^n \hat{x}_i \frac{\dot{x}_i}{x_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \hat{x}_i (Ax)_i - \sum_{i=1}^n x_i (Ax)_i \end{aligned} \quad (15)$$

それぞれ式 (15) の右辺第 1 項は $-\sum_{i=1}^n (b-a_i) \hat{x}_i x_i + b$ 、第 2 項は $-\sum_{i=1}^n (b-a_i) x_i^2 + b$ と整理されるので $\dot{v}(x)$ は

$$\dot{v}(x) = -\sum_{i=1}^n (b-a_i) \hat{x}_i x_i + \sum_{i=1}^n (b-a_i) x_i^2 \quad (16)$$

と表すことができる。右辺を $h(x)$ とするとき、 $h(x)$ が $x = \hat{x}$ のとき最小値 $h(\hat{x}) = 0$ となることを確認することができる。

$$\min_x h(x) = -\sum_{i=1}^n (b-a_i) \hat{x}_i x_i + \sum_{i=1}^n (b-a_i) x_i^2 \quad \text{subject to} \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1$$

ラグランジュ関数を $L(x, \lambda)$ とすると、1 階条件は

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = (b-a_i)(-\hat{x}_i + 2x_i) - \lambda = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

となる。これから x_i をもとめると

$$x_i = \hat{x}_i$$

すなわちダイナミクス (9) の平衡点 (12), (13) のとき極値をとる。さらに $h(x)$ は凸関数と判明するので $x = \hat{x}$ のとき最小値をもつ⁵⁾。このときの $h(x)$ を求めると、 $h(\hat{x}) = 0$ となる。

したがって $h(x) \geq 0$ で $x = \hat{x}$ のときにのみ $h(x) = 0$ となる。以上から、 $\dot{v}(x) \geq 0$ で、 $x \in \Delta_n$ かつ $x \neq \hat{x}$ のとき $\dot{v} > 0$ である。

(iv) 関数 $V(x)$ がリヤプノフ関数になること

いま $V(x) \equiv v(\hat{x}) - v(x)$ と定義すると、 $V(\hat{x}) = v(\hat{x}) - v(\hat{x}) = 0$ で、 $x \neq \hat{x}$ では $V(x) > 0$ で

5) 別証として 2 階条件のヘッセアンをとると、正定符号になることが確認できる。

ある。また $x \neq \hat{x}$ では $\dot{V}(x) = -\dot{v}(x) < 0$ となる。よって関数 $V(x)$ は狭義のリヤプノフ関数である。それゆえ \hat{x} は混合戦略単体 Δ_n 内部において漸近安定である。したがって定理 1 から混合戦略状態としての平衡点 \hat{x} は進化的安定戦略 (ESS) である。 (証明終)

以上から模倣ダイナミクスが利得行列 (5) を持つならば、混合戦略状態 (10) は進化的安定戦略状態 (ESS) である。この結果は、 $a_i = 1 (i=1, 2, \dots, n)$ 、 $b = 1 + a$ とおくと、拙稿 (2011) で検討した「均等」立地状態をこのモデルでの特殊ケースとして含む。

4 混合戦略状態としての立地の性質と強支配にもとづく立地

第 2 節で説明したように、人口集団の各々の主体にとって戦略とは、 n 個に分かれた立地点から 1 地点を選択することである。各主体にとって共通な利得行列 A が (5) である場合には混合戦略状態、すなわち人口が n 個の地点に分かれて立地する状態が進化的安定戦略状態であることを前節で示した。本節では次の分析をおこなう。はじめに定理 2 における利得行列 (5) の混合戦略状態としての平衡点 (10) の性質として、対角要素 $a_i (i=1, \dots, n)$ を大きい順に並び替えるとき、人口の立地分布が対角要素の大きい順に対応して決まることを示す。次に戦略間の支配・被支配関係によって立地点が持続あるいは消滅する場合の立地分布に関する性質を導く。

前節で検討した利得行列 A の主対角要素を a_1 から a_n へ順次小さくなるように大きい順に並び替えるとき、混合戦略状態としての平衡点 \hat{x} が次の性質をもつ。

性質 1 利得行列 A の主対角要素が $b > a_1 > a_2 > \dots > a_i > \dots > a_n$ ならば、対応する立地点の人口シェアは

$$\hat{x}_1 > \hat{x}_2 > \dots > \hat{x}_i > \dots > \hat{x}_n$$

となる。

(証明) \hat{x}_i は式 (10) で与えられる。いま地点 i と $i+1$ の間でのシェアの大小関係を比較する。このとき (10) の分母を B_n で表わす。

$$\begin{aligned} \hat{x}_i - \hat{x}_{i+1} &= \frac{1}{B_n} \left\{ \prod_{j=1, j \neq i}^n (b - a_j) - \prod_{j=1, j \neq i+1}^n (b - a_j) \right\} \\ &= \frac{1}{B_n} (a_i - a_{i+1}) \prod_{j=1, j \neq i, j \neq i+1}^n (b - a_j) \end{aligned}$$

となる。 $a_i > a_{i+1}$ 、 $b > a_j$ なので、 $\hat{x}_i - \hat{x}_{i+1} > 0$ となる。 (証明終)

a_i は地点 i を選択した者が互いにマッチングするときを得られる利得を表し、それは地点 i を選択する者への利益、つまり地点の「魅力度」（経済的、文化的、その他の利益を含む）と
 いうてよい。進化的安定戦略状態では、各地点の人口シェア x_i は魅力度にしたがって決まる。
 よって性質 1 は魅力度が大きければ、人口シェアも大きくなることを示している。

長期にわたる都市の動的な変化は、都市規模すなわち人口の変化として現れる。魅力を失った都市は次第に人口数を減らし、種々の面で魅力ある都市は次第に人口を増加させる。これは
 地点 i の人口数が減少すること、すなわち地点 i の人口シェア（比率） $x_i(t)$ が減少することは、
 その地点の人口がより良い利得を求めて他の地点への移動することを意味する。地点 i で得ら
 れる利得が他の地点で得られる利得より小さいならば地点 i の人口が流出する。言い換えると、
 戦略としての地点 i が他の地点に支配される状態にあるときに、人口シェア $x_i(t)$ は減少する。
 これを進化ゲームの視点から検討するために強支配の概念を導入する。

強支配については、すでに純粋戦略が混合戦略（純粋戦略も含む）によって強支配される場
 合 (Hofbauer and Sigmund (1998), (2003), Samuelson and Zhang (1991), Weibull (1996)
 など) について定義がなされている。強支配概念を用いて $x_i(t)$ が 0 に収束することについて
 は、レプリケーター・ダイナミクスにおけるシェア、あるいはレプリケーター・ダイナミクス
 を拡張した選択ダイナミクスにおけるシェアおよび収束証明のために必要な他の定義に応じて
 その条件は異なっている。

はじめに強支配の定義を導入する。

定義 1 ある（純粋または混合）戦略 $y \in \Delta_n$ が存在して、すべての $x \in \Delta_n$ に対して

$$(Ax)_i < yAx \quad (17)$$

ならば、純粋戦略 i は戦略 y によって強支配されるという⁶⁾。

本節では強支配のケースとして、純粋戦略が他の純粋戦略によって支配されるケースを検討
 する。なぜならば立地選択においては主体は現在の立地点からの期待利得を比較の対象として
 純粋戦略である他の立地点での期待利得を比較する。一人の主体が行使しうる戦略は純粋戦略
 なので、立地点を変更する場合に立地点を 1 つ、つまり 1 つの純粋戦略を選択する。こうした
 支配・被支配によるシェアの変化について次のような定理がある⁷⁾。

6) Weibull (1996) p. 10 を参照。

7) Weibull op. cit p. 79 を参照。

定理 3 任意の混合戦略状態からゲームが始まるとき、純粋戦略 i が強支配されるならば、そのシェア $x_i(t)$ はゼロに収束する。

以下では利得行列 (5) の非対角要素の一部が b と異なる場合と a_1 が b より大きくなる場合の 2 つのケースを検討する。利得行列の非対角要素の一部が b と異なる場合として、 b より小さくなる場合を取り上げる。立地点 i の主体が立地点 h の主体とマッチングして得られる利得 $b_{ih} < b$ (A の要素 (i, h)) とする。すなわち、利得行列 A の非対角要素 (i, h) のみが b_{ih} で、他の非対角要素は b であるとする。

はじめに立地点 $j (\neq h)$ によって立地点 i が強支配されるかどうかを調べる。立地点 i での期待利得は $(Ax)_i = -(b - a_i)x_i - (b - b_{ih})x_h + b$ で、立地点 j での期待利得は $(Ax)_j = -(b - a_j)x_j + b$ である。立地点 $j (\neq h)$ によって立地点 i が強支配されるためには、任意の $x \in \Delta$ に対して

$$(Ax)_i - (Ax)_j = -(b - a_i)x_i - (b - b_{ih})x_h + (b - a_j)x_j < 0$$

が成り立つことである。しかし右辺第 3 項は $b - a_j > 0$ なので、 x_i と x_h が x_j に対して十分小さいならば右辺は正になる。よって立地点 $j (\neq h)$ によっては立地点 i は強支配されない。

つぎに立地点 h によって立地点 i が強支配されるかを調べる。 h での期待利得は $(Ax)_h = -(b - a_h)x_h + b$ である。

$$\begin{aligned} (Ax)_i - (Ax)_h &= -(b - a_i)x_i - (b - b_{ih})x_h + (b - a_h)x_h \\ &= (a_i - b)x_i + (b_{ih} - a_h)x_h \end{aligned}$$

右辺第 1 項は $a_i - b < 0$ なので第 2 項の $b_{ih} - a_h$ が負であれば、どのような $x \in \Delta$ に対しても上式は負になる。したがって $b_{ih} < a_h$ であることが立地点 i が立地点 h によって強支配されることの十分条件である。

性質 2 $b_{ih} < b$ のとき、純粋戦略としての立地点 i が強支配されるための十分条件は $b_{ih} < a_h$ である。

n 個の立地点の中に性質 2 を満たすような立地点がある場合には、定理 3 によって強支配される立地点の人口シェアは 0 に収束する。進化的安定状態ではそのような立地点は排除されることになるので、利得行列から性質 2 を満たすすべての立地点 (戦略) に対応する行と列を削除して後に残る利得行列は、もはや強支配される戦略を含まない行列となる。縮約された利得行列は対角要素が a_i で、非対角要素が b である $\tilde{n} (< n)$ 次元の利得行列となる。前節の定理 1

と定理 2 を縮約された利得行列に適用すれば \tilde{n} 地点 (戦略) は進化的安定戦略となる. さらに性質 1 により各立地点の人口シェアは利得行列の主対角要素の大きさに対応して決まる.

言い換えると, 立地点 i の主体が立地点 h の主体とマッチングして得られる利得が, 立地点 h の魅力度 (立地点 i の主体同士のマッチングによる利得) より小さいならば, 立地点 i の主体が得る期待利得 $(Ax)_i$ がどのような人口分布を想定しても立地点 i の主体が得る期待利得 $(Ax)_i$ 小さくなり, 立地点 i の主体は立地点を i から j に変更する. これが繰り返り立地点 i の人口シェアは減少しやがては 0 になる. 人口シェアが 0 になれば純粋戦略としての立地の対象が 1 つ消滅する. 強支配される立地点がなくなるまでこのような現象が繰り返される. その結果, 強支配される地点がある場合, 縮約されたゲームで進化的安定状態としての立地点がその魅力度 a_i にしたがって人口シェアを持つように形成される.

次に魅力度 a_i ($1 < i < n$) のもっとも大きい立地点 1 の魅力度 a_1 の値によって立地点 1 による強支配が起こるのかどうかを検討する. まず a_1 が $a_1 < b$ の場合を検討する. 結果は $a_1 < b$ の関係が保たれる限り, 他のどの地点も立地点 1 によって支配されない. というのは

$$(Ax)_i - (Ax)_1 = (b - a_1)x_1 - (b - a_i)x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (18)$$

右辺の第 1 項の $b - a_1$ が正なので x_1 が x_i に対して十分大きい $x \in \Delta_n$ ならば, 上式は負にならない. よって立地点 1 はどの立地点も支配できない.

魅力度 a_1 が $a_1 > b$ の場合を検討する. このときには (18) の右辺の第 1 項も負になる. 第 2 項は負なので, いかなる $x \in \Delta_n$ に対しても (18) は負になる. よって立地点 2, 3, \dots , n は立地点 1 によって強支配される.

性質 3 立地点 1 の魅力度 a_1 が $a_1 > b$ ならば, 立地点 2, 3, \dots , n は立地点 1 によって強支配される.

性質 3 は魅力度が最も大きい立地点がその魅力度を一層高めて, 他の立地点を圧倒してしまうケースである. 性質 3 のケースでは, 立地点 1 によって他のすべての立地点が強支配されて進化的安定戦略状態は立地点 1 だけとなる. 言い換えると, 立地点 1 が半永久的にその魅力度を保持することができるならば, 他の立地点は次々と人口シェアを減少し, やがては 0 になる. 行き着く進化的安定状態は, 立地点 1 のみが存在するような状態である. しかしながら, 現実をみると 1 つの地点に集中してしまうことはない. 1980 年代後半から東京の持つ経済的・社会的な重要性の増大のために一極集中が起こったが, その一極集中も 1990 年代半ばには終息している. 一般に都市は絶えず魅力・利便性などの点で成長するが, 同時にその過密・混雑の不利益のために縮小する. したがって性質 3 のような現象は永続的というよりある一定の時

期には妥当すると考えるべきである。

5 結 び

本稿では模倣ダイナミクスにもとづく立地を考察した。得られた結論は定理 2、性質 1~3 である。定理 2 では利得行列が (4) の場合、混合戦略状態としての平衡点が進化的安定であることを示した。とくに主対角要素を大きい順に並び替えると、性質 1 のようにその大きさに従って人口シェアが決まることが示された。この定理 2 と性質 1 は現実を説明するものと考えてよい。一般にすべての人口は 1 つの地点に集中立地するのではなく、数多くの地点に分散して立地している。混合戦略状態が進化的安定であることは、そのような事実に合致するものである。また都市間あるいは地域間の人口の差異はそれぞれの都市あるいは地域のもつ経済的・社会的・文化的な魅力度・重要性を反映している。性質 1 も妥当な結果と考えられる。

性質 2 と 3 は、強支配の繰り返しの極限の戦略的安定状態に至る過程の現象として、立地点の消滅が起こることを強支配の概念によって説明し、人口分布に関する立地の性質を導いた。性質 2 は、他地域と比較して地域の魅力（その地域に立地することで得ることのできる利得）がいかなる状態でも劣るような場合には、人口シェアが減少すると主張している。したがって性質 2 が満たされる場合には、その人口シェア、したがって立地点はやがて消滅することになる。性質 3 はもっとも魅力の大きな地点が一層魅力を増していくような場合、その地点に人口が集中してしまうという一極集中を説明するものである。現実には照らし合わせるとき、ここで得た結論は妥当なものと考えられる。

しかしながら検討すべき課題は残る。立地問題を分析する場合、地点間の距離それに伴う移動費用が発生する。距離あるいは移動費用が立地のあり方に大きく影響するので、距離、移動費用を立地要因としてモデルに組み込むことが重要である。しかしながら本稿ではこれは検討の対象にならなかった。この点において本来的な立地分析とは言い難いので、今後の分析には距離あるいは移動費用を考慮したモデルが必要である。

また、利得行列の要素については定数として扱った。けれども人口の集中・分散はそれに伴って規模の経済として立地点の魅力を増したり、逆に混雑状態を引き起こして魅力を減じたりする。これを考慮するには利得行列の要素を人口シェアの関数として扱うべきである。こうした点を課題として改善することが分析を本来的な意味での立地分析につながるものと考えられる。

模倣ダイナミクスにもとづく立地

参考文献

- [1] Hirsh, M. W., and S. Smale (1974) *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press. (M. W. ハーシュ, S. スメール著, 田村一郎他 2 名訳 (1976) 『力学系入門』岩波書店)
- [2] Fujita, M., and T. Mori (1996), “The Role of ports in the making of major cities: Self-agglomeration and hub-effect.” *Journal of Development Economics*, vol. 49, pp.93-120.
- [3] Fujita, M., P. Krugman, and A. J. Venables (1999), *The Spatial Economy: Cities, Region, and International Trade*, MIT Press. (藤田昌久, P. クルグマン, A. J. ベナブルズ著, 小出博之訳 (2000) 『空間経済学 - 都市・地域・国際貿易の新しい分析 -』, 東洋経済新報社)
- [4] Hofbauer, J., and K. Sigmund (1998) *Evolutionary Games and Population Dynamics*, Cambridge UP.
- [5] Hofbauer, J., and K. Sigmund (2003) ‘Evolutionary Game Dynamics’, *Bulletin of The American Mathematical Society*, Vol. 40, No. 4. pp. 479-519.
- [6] Montet, C., and D. Serra (2003) *Game Theory & Economics*, Palgrave Macmillan.
- [7] Porter, M. E. (1990) *The Competitive Advantage of Nations*, The Free Press. (M. E. ポーター著, 土岐坤他訳 (1992) 『国の競争優位』ダイヤモンド社)
- [8] Samuelson, L. and J. Zhang (1992) ‘Evolutionary Stability in Asymmetric Games’, *Journal of Economic Theory*, Vol. 57, pp. 363-391.
- [9] Smith, J. M. (1982) *Evolution and Theory of Games*, Cambridge UP. (J. メイナード-スミス著, 寺本英, 梯正之訳 (1985) 『進化とゲームゲーム理論 - 闘争の論理 -』産業図書)
- [10] Vega-Redondo, F. (1997) ‘The Evolution of Walrasian Behavior’, *Econometrica*, Vol. 65, No. 2, pp. 375-384.
- [11] Weibull, J. W. (1996) *Evolutionary Game Theory*, MIT Press.
- [12] 大浦宏邦 (2008) 『社会科学者のための進化ゲーム理論 - 基礎から応用まで』勁草書房.
- [13] 慶田 收 (2011) 『レプリケーター・ダイナミクスに基づく立地均衡の安定性』『熊本学園大学 経済論集』第 17 巻 1・2 合併号

Summary

Location based on Imitation Dynamics

This paper considers a location model based on Imitation Dynamics. When two agents are picked randomly from any regions and their payoffs are compared, the agent of a region with lower payoff is supposed to change his location to the region with higher payoff. The stationary point of dynamics as a mixed strategy state is proved to be the evolutionary steady state (ESS). When we consider the order relation of primary diagonal elements of payoff matrix, it turns out that the population shares of regions coincide with the sizes of payoffs (the diagonal elements). That is, the more attractive the region is, the larger its population share. When strict dominant relation among the regions exists, the region dominated loses its population size. Especially when all other regions are dominated by one region, the population of other regions concentrates into the dominant region.