内生的ネットワーク分断リスクと戦略的ノード機能喪失対策費用投入ゲーム

宇野木　広　樹*

要　　旨

本稿はネットワークからノードが消失してしまうことでノード間の情報や便益の伝達が行われなくなってしまう状況において，各ノードが戦略的に機能喪失対策費用を投入する「ノード機能喪失対策費用投入ゲーム」を提示する。

本稿のモデルにおいて各ノードは「ネットワークから得る便益を他のノードへ伝達する」,「自らの便益とネットワークを通じて他のノードから便益を得る」という2つの機能を確率的に失うが，各ノードは費用を投入することによって自らのノード機能喪失確率を変化させることができるものとする。

各ノードが機能喪失対策費用を投入する「ノード機能喪失対策費用投入ゲーム」において，いかなるネットワークにおいても最大と最小のナッシュ均衡が存在することを示す。また，empty ネットワーク以外のいかなるネットワークもノード機能喪失対策費用投入ゲームにおいてナッシュ均衡と効率性を同時達成できないことを示す。さらに，ネットワークを所与として，ナッシュ均衡と効率性のどちらの達成に際しても，他のノードに対して大きな影響を与えるノードほど多くの費用投入が必要となることを示す。

数値解析分析を行い，複数のネットワークにおいて，効率的なノード機能喪失対策費用投入がどのような特徴を持っているかを確認する。

キーワード：ネットワーク形成ゲーム，内生的ネットワーク分断リスク，スーパーモジュラーゲーム，効率性，ナッシュ均衡

はじめに

現代社会において，情報の持つ価値は非常に高く，様々な情報がネットワークを通じて瞬時に伝達されている。また，現代社会においてどのようなネットワーク構造が情報を効率的に伝

＊熊本学園大学経済学部経済学科特任助教
連絡先　〒862-8680　熊本市大江 2-5-1　熊本学園大学
Email: unoki@kumagaku.ac.jp

達することができるのかということは現代社会において非常に大きな分析テーマである。ネットワークに関する分析は物理・数学・工学・社会学・生物学など，多岐の分野で盛んに行われてきている。経済学において，ネットワーク形成に関する研究は，Jackson and Wolinsky (1996) 以降，多くの研究が蓄積されている。これらの研究における代表的な研究としては，各ノードが一方的にリンクを形成・分断できる Bala and Goyal (2000a) と，Jackson and Wolinsky (1996) がまず挙げられる。

Jackson and Wolinsky (1996) は，同質的なノードが主体的に意思決定を行う静学的ネットワーク形成ゲームにおけるネットワークの効率性とペア安定性 (pairwise stability) を分析している。研究の中で，リンク形成費用と便益の残存率との関係によって，効率的なネットワークと安定的なネットワークがそれぞれどのような形状になるのかを分析している。また，ネットワークの効率性と安定性が必ずしも両立しないことを明らかにしている。

次に Bala and Goyal (2000a) では，同質的なノードがリンクを相手との合意なしに一方的にリンクを形成・分断することができる動学的リンク形成モデルの分析を行っている。便益がリンク費用を支出したノードにのみ発生する一方向モデル (one-way flow model) と，リンクが形成された際に便益が双方のノードに発生する双方向モデル (two-way flow model) の 2 つのモデルについて，ネットワークの効率性やネットワークがナッシュ均衡となる条件について分析している。

また，紹介した 2 つの研究以外にも，異質的なノード間のネットワーク形成を分析した研究として，Galeotti, Goyal and Kamphorst (2006) が挙げられる。Galeotti, Goyal and Kamphorst (2006) は，ノード間の便益の違いはネットワークの連結性にとって重要であり，リンク形成費用の違いはネットワーク連結性のみならず個々のコンポーネントの構造に対して決定的な影響を及ぼすことを示している。

また，ネットワーク分析においてネットワークのリスクを考慮したネットワークの頑健性が広く分析されるようになって来ており，ネットワーク形成ゲーム理論では，Bala and Goyal (2000b) において，リンクが情報 (便益) を伝達する信頼性に焦点を当て，ネットワークにおける各リンクが確率的に削除されることによってネットワークフローが分断されてしまうというネットワークの分断リスクを考慮した分析が行われている。Bala and Goyal (2000b) は，ノード間に形成されるリンクが便益を伝達する信頼性に焦点をあて，効率的なネットワークとナッシュネットワーク (ネットワークがナッシュ均衡となっている) の性質を分析している。分析の結果，もしも社会が大きくて，リンク形成費用がある適当な範囲にあるならば，ナッシュネットワークと効率的ネットワークはともに全てのリンクが冗長であるようなネットワークに

なることを示している。また，リンク形成費用が非常に高いか低い場合，もしくはリンクが便益を伝達する信頼性が高いならば，効率性と安定性はほぼ一致することを示している。しかしながら，リンク形成費用とリンクが便益を伝達する信頼性が中程度ならば，ナッシュネットワークは社会的に最適なネットワークと比べてリンク形成が過少になってしまうかもしれないことを示している。

また，Bala and Goyal (2000 b) を拡張した研究も多数あり，例えば Haller and Sarangi (2003) は各ノードにおいて便益とリンク形成費用は同質であるが，各リンクにおいて形成便益を伝達できる確率が異なるモデルを提示している。さらに，Haller, Kamphorst, and Sarangi (2007) は各ノードにおいて便益が異なり，各リンクにおいてリンク形成費用と便益を伝達できる確率がそれぞれ異なるモデルを提示し，ある特定のパラメーターのもとではナッシュ均衡が存在しないことを示している。

Bala and Goyal (2000 b) に代表されるネットワークにおけるリンクの信頼性によってネットワークフローが分断されてしまう状況をモデル化するアプローチは，通信回線や交通路線などが分断されることでネットワークから情報や便益を得ることが出来なくなる状況を分析するのに適している。しかし，このようなアプローチは，企業の倒産や市場からの退出を考慮した企業間のネットワーク形成，都市災害が発生する事を考慮した都市間のネットワーク形成，サーバーダウンやウィルス感染による情報伝達の分断を考慮したネットワーク形成等の分析には適していない。このようなネットワークを分析するためには，各ノードがネットワークから消失してしまうことで各ノード間の情報や便益の伝達が行われなくなってしまうモデルを考慮する必要がある。しかしこれまでのネットワーク形成ゲーム理論では，ノードがネットワークから消失してしまう事でネットワークフローが分断される分析は，筆者が知る限りでは Jun and Kim (2007) と宇野木 (2007) 以外には行われていない。

一方，複雑ネットワークの研究においては，本稿で考慮しているネットワークが分断されてしまうリスクを考慮した分析が行われており，Albert, Jeong and Barabasi (2000) は，各ノードがランダムに消滅するモデルにおいて，スケールフリーネットワーク (scale-free network)[1] と，ランダムネットワーク (exponential network)[2] の 2 つのネットワークを比較し，スケー

1) k 個のリンクを持つノードの確率密度を $p(k)$ とすると，その確率密度は $p(k) \sim k^{-\gamma}$ で表されるベキ則に従うネットワークである。ここで，γ はベキ指数と呼ばれ，多くのスケールフリーネットワークが 2〜3 のベキ指数を持つことが知られている。また，自然界に存在する複雑なネットワークのほとんどはベキ則に従うことが明らかになっている。例えば，ワールド・ワイド・ウェブや細胞内のネットワーク等もベキ則に従う。

2) 各ノードが他のノードと一定確率でリンクを形成するネットワーク。ほぼすべてのノードは近似的に同数のリンクを持つ。

ルフリーネットワークが非常に強い頑健性を持っていることを明らかにしている。スケールフリーネットワークの持つノードの消滅に対する頑健性は，各ノードが持つリンクの数が異なるベキ則に従うネットワークの特徴から来るものである。スケールフリーネットワークにおいては，大多数のノードが少数のリンクしか持っておらず，少数の数多くのリンクを持つハブノードがネットワークの連結に重要な役割を果たしている。よって，消滅するノードのほとんどがネットワーク連結に重要ではないノードであるため，スケールフリーネットワークはランダムにノードが消滅する状況において非常に強い頑健性を持つ。一方，スケールフリーネットワークは特定のノードを狙った攻撃には脆い事も指摘してあり，ネットワークにおいて重要な役割を果たしているノードを見極め，それら複数を同時に攻撃することでネットワークは簡単に崩壊してしまうことを示した。また，ネットワークにけるノードが除去された場合に，どの程度ノード間の関係に影響を与えるのかというグラフの中心性に関する研究は盛んに行われており，様々な中心性の尺度が開発されている[3)]。

以上の状況を踏まえ，本稿では次の 2 つの仮定を導入し，ノードがネットワークから消失してしまう事でネットワークフローが分断される状況を分析するモデルを提示する。第 1 に，各ノードは確率的に「リンクを通じて便益を他のノードへ伝達する」,「自らの便益とネットワークを通じて他のノードから便益を得る」という 2 つの機能を同時に失うという仮定を導入する。第 2 に，各ノードは自身に費用を投入することによって自身が機能を失う確率を変化させることが出来るものと仮定する。以上の仮定を導入し，ネットワークを所与として，各ノードが機能喪失対策費用を投入する「ノード機能喪失対策費用投入ゲーム」を分析する。

本稿の独創性と理論的貢献は以下の 2 点であると考える。第 1 に，先行研究の Jun and Kim (2007) は，一定数のノードが消失する状況を仮定し，その仮定のもとでネットワークの分析を行っているものの，ネットワークにおいて何個のノードが同時に消失するかを確定的に事前に知ることは不可能であろう。この点を考慮して，本稿ではノードが消失することで実現され得る全てのネットワークについてネットワークの実現確率とネットワーク価値を計算することでネットワークの期待価値を求める。第 2 に，先行研究の宇野木 (2007) は，ノードが確率的にネットワークから消失する仮定を導入したネットワーク形成ゲームを分析したが，本稿はノード機能喪失対策費用投入ゲームにおいて各ノードの機能喪失確率の内生化を行っている。

本稿の構成は次の通りである。まず第 1 節にて，Bala and Goyal (2000 b) に依拠して，各

3)　主なものとしては，Harary and Ostrand (1971) で示された「切断中心性」，Freeman (1977) で示された「媒介中心性」，そして Freeman et al., (1991) で示された「フロー媒介中心性」などが挙げられる。

ノードがノード機能を確率的に失うネットワーク形成モデルを提示する。第2節にて，ノード機能喪失対策費用投入ゲームにおいて効率性とナッシュ均衡に関して分析を行う。第3節にて，数値解析をおこない，シミュレーションによっていくつかのネットワークにおける効率的なノード機能喪失対策費用投入がどのようになるかを確認する。

1　戦略的ネットワーク形成モデル

本節では Bala and Goyal (2000b) に依拠して，各ノードがノード機能を確率的に失うモデルを提示する。

1.1　モデル

本稿ではリンク形成の際に相手との合意なしに一方的にリンクを形成することができる非協力的ネットワーク形成モデルを考え，Bala and Goyal (2000b) をもとにモデルを構築する。ノード集合を $N=\{1, \cdots, n\}$，$n \geq 3$ であり有限であるとする。各ノードはそれぞれ便益を所有しており，ノード間に形成されたリンクを介して便益の伝達を行うことで自らの利得を高めることができるものとする。ノード i とノード j との間に形成されたリンクは ij と記し，リンク ij を通じてノード i とノード j 間で相互に便益が伝達されるものとする。本稿では，各ノードは同時にリンクを形成するものとする。ノード i のリンク形成戦略を行ベクトル $g_i=(g_{i1}, \cdots, g_{ii-1}, g_{ii+1}, \cdots, g_{in})$ にて記し，任意の $j \in N \setminus \{i\}$ に関して $g_{ij} \in \{0, 1\}$ であるとする。ここで，$g_{ij}=1$ ならばノード i はリンク ij の形成の為にリンク形成費用を拠出し，$g_{ij}=0$ ならばノード i はリンク形成費用を拠出しないものとする。ノード i のリンク形成戦略集合を G_i，全てのノードのリンク形成戦略からなる戦略空間を $G=G_1 \times \cdots \times G_n$，各ノードのリンク形成戦略の組を $g=(g_1, \cdots, g_n)$，$g \in G$ と記す。本稿では無向ネットワークを対象として分析を行う。いま，$\bar{g}_{ij}=\max\{g_{ij}, g_{ji}\}$[4]，$\bar{g}_i=(\bar{g}_{i1}, \cdots, \bar{g}_{ii-1}, \bar{g}_{ii+1}, \cdots, \bar{g}_n)$と記し，無向ネットワークを $\bar{g}=(\bar{g}_1, \cdots, \bar{g}_n)$ にて定義する。$\bar{g}_{ij}=1$ ならばノード i, j 間に無向リンクが形成され，ノード i, j 間において相互に便益が伝達されるものとする。一方，$\bar{g}_{ij}=0$ ならばノード i, j 間にリンクは形成されない。このことはリンクの形成においてノード間の合意は必要ではない事を示しており，本稿は非協力的ネットワーク形成モデルである。いま任意のリンク ij の形成において，$g_{ij}=1$，$g_{ji}=0$ ならばノード i のみリンク形成費用を拠出し，$g_{ij}=0$，$g_{ji}=1$ ならばノード j のみリンク形成費用

4)　ここで，$\bar{g}_{ij}$ はノード i，j 間に無向リンクが存在するか否かを示すものであり $\bar{g}_{ij}=\bar{g}_{ji}$ とする。

を拠出し，$g_{ij}=1$，$g_{ji}=1$ ならばノード i とノード j のどちらか一方のみがリンク形成費用を拠出するものとする[5)]。

各ノードは「リンクを通じて便益を他のノードへ伝達する」,「自らの便益とネットワークを通じて他のノードから便益を得る」という 2 つの機能を同時に確率的に失い，各ノードの機能喪失確率は各ノードにおいて独立であるとする。ここで，ノードが機能を失ったとしても，リンクはそのまま維持されており，リンク形成費用はノード機能が失われたとしても支払われるものとする。いま，ノード機能を失ったノードの集合を Z とし，機能を失ったノードの数を $z \leq n$ とする。一方，機能を失っていないノード集合を $I=N \backslash Z$ とする。いま，$\bar{g}$ を所与として，ノードが機能を失うことで実現されるネットワークを潜在ネットワークと呼び，z 個のノードが機能を失った代表的潜在ネットワークを $\bar{g}_z^a$ と記すことにする。z 個のノードが機能を失った潜在ネットワーク $\bar{g}_z^a$ の集合を $\bar{g}_z=\left\{\bar{g}_z^1, \bar{g}_z^2, \cdots, \bar{g}_z^{{}_nC_z}\right\}$ と定義する。ここで，$\bar{g}_z$ における潜在ネットワークの数 $|\bar{g}_z|$ は n 個のノードのうち z 個のノードが機能を失う組合せの総数であるので $|\bar{g}_z|={}_nC_z=n!/z!(n-z)!$ となる。また，潜在ネットワーク $\bar{g}_z^a$ において機能を失っているノード集合を $Z\left(\bar{g}_z^a\right)$，機能を失っていないノード集合を $I\left(\bar{g}_z^a\right)$ と記す。

【定義】（経路）

潜在ネットワーク $\bar{g}_z^a$ において，$\bar{g}_{ij}=1$ であるかもしくは $\bar{g}_{ii_1}=\cdots=\bar{g}_{i_m j}=1$ である非空な $\{i, i_1, \cdots, i_m, j\} \subset I\left(\bar{g}_z^a\right)$ が存在するならば，ノード i, j 間に経路が存在するといい，潜在ネットワーク $\bar{g}_z^a$ におけるノード i, j 間の経路を $I_{ij}\left(\bar{g}_z^a\right)$ と記す。

本稿では，任意の潜在ネットワークにおいて，任意のノード i, j 間に経路が存在するならば，リンク ij が存在せずともノード i, j 間で便益の伝達が行われるものとする。

1.2　ノードの期待利得とネットワーク価値

いま，$\bar{g}_z^a$ においてノード i が便益を得ることの出来るノードの集合を $N\left(i;\bar{g}_z^a\right)=\left\{k \in N \backslash \{i\} \mid l_{ik}\left(\bar{g}_z^a\right)\right\}$ と記し，g においてノード i がリンク形成費用を拠出しているノードの集合を $N^d(i;g)=\{k \mid g_{i,k}=1\}$ と記す。また，任意のノード i のノード機能喪失確率を $\alpha_i \in [0, 1]$ と記し，ノード機能喪失確率は自身にノード機能喪失対策費用投入 s_i を行うことによって変化さ

5)　本稿では各ノードがノード機能を失う確率はリンク形成費用とは無関係であり，双方のノードがリンク形成費用を拠出していたとしてもリンクを通じて得る便益は変わらないものとする。その結果，双方のノードがリンク形成費用を拠出しているリンクが存在するネットワークは効率的ではなく，ナッシュネットワークでもない。よって，分析を簡単化するためにこのように仮定する。

せることができるとする。ここで，s_i は $\bar{s}$ を有限な正の実数であるとし，$0 \leq s_i \leq \bar{s}$ である任意の実数であるとする。また，各ノードのノード機能喪失対策費用投入の組を $s=(s_1, \cdots, s_n) \in S$ と記す。S は n 個のノードのノード機能喪失対策費用投入戦略の集合の直積 $S=s_1 \times \cdots \times s_n$ であり，ユークリッド空間の有界閉な凸集合である。

また，ノード i のノード機能喪失確率 $\alpha_i : s_i \to R^+$ はノード機能喪失対策費用投入 s_i に関して連続関数であり，2 回連続微分可能であるとし，$\alpha_i \in [0, 1]$，$\alpha_i(0)=\bar{\alpha} \leq 1$，$\alpha_i(\bar{s})=\underline{\alpha} \geq 0$，$\alpha_i'=d\alpha_i/ds_i<0$，$\alpha_i''=d^2\alpha_i/ds_i^2>0$，$\lim_{s_i \to 0} \alpha_i' = -\infty$ [6)]，$\lim_{s_i \to \bar{s}} \alpha_i' = 0$ であるとする。また，ノード機能喪失確率の関数形は各ノードに関して同一であり，$s_i=s_j$ ならば $\alpha_i=\alpha_j$ であるとする。

各ノードが機能を失う確率は独立であるので，s のもとで任意の潜在ネットワーク $\bar{g}_z^a$ の実現確率 $P(\bar{g}_z^a, s) \in [0, 1]$ は以下のようになる。

$$P\left(\bar{g}_z^a, s\right) = \prod_{x \in Z\left(\bar{g}_z^a\right)} \alpha_x \prod_{y \in I\left(\bar{g}_z^a\right)} (1-\alpha_y).$$

また，$\bar{g}$ を所与として，潜在ネットワーク $\bar{g}_z^a$ においてノード i の得る総便益 $B_i(\bar{g}_z^a|\bar{g})$ は以下で定義される。

$$\begin{aligned} B_i\left(\bar{g}_z^a|\bar{g}\right) &= w_{ii} + \sum_{j \in N\left(i, \bar{g}_z^a\right)} w_{ij} \\ &= w_{ii} + V_i\left(\bar{g}_z^a|\bar{g}\right). \end{aligned}$$

ここで w_{ii} は自らが所有する便益であり，もしもノード i がノード機能を喪失した場合には失われてしまうと仮定する。また，w_{ij} はノード i がネットワークを通じてノード j から得ることのできる便益であり，w_{ii}，$w_{ij}>0$，$w_{ii}>w_{ji}$ であるとする[7)]。さらに，$V_i(\bar{g}_z^a|\bar{g})$ はノード i が潜在ネットワーク $\bar{g}_z^a$ においてネットワークを通じて他のノードから得ることのできる便益の合計であり，潜在ネットワーク $\bar{g}_z^a$ において，ノード i は自身がノード機能を失わない限り w_{ii} を獲得することが出来るが，w_{ij} を獲得するためにはノード i，j 間において経路 $l_{ij}(\bar{g}_z^a)$ が存在していなければならない。すなわち，ノード機能喪失対策費用の投入は，ネットワークからより多くの便益を得る側面と，自らの持つ便益を失わないようにする側面の 2 つの側面を持っている。もしも w_{ii} が非常に大きい場合には，たとえネットワークから得られる便益が少なかっ

6)　ここで仮定しているものは，empty ネットワークを除く任意のネットワーク $\bar{g}$ において任意のノード i が $c_i>0$ であるための十分条件であり，本来ならば，任意のノード i，j に関して $\lim_{s_i \to 0} \sum_{z=0}^{n-2} \left[-\alpha_i' \bar{\alpha}^z (1-\bar{\alpha})^{n-z-1} w_{ii}\right] > 1$ が満たされていれば十分である。

7)　例えば，ネットワークを通じて情報を交換する状況において，自らの持つ情報以上の事を相手に対して伝えることができない事を考えれば $w_{ii}>w_{ji}$ という仮定は許容できるものであろう。

たとしても，各ノードは自らの持つ便益を失うリスクを低くするために多くのノード機能喪失対策費用投入を行うかもしれない。ここで，ノード i，j 間において複数の経路が存在する場合，最短経路のみから便益 w_{ij} は伝達され，他の経路からは便益 w_{ij} は伝達されないものとする。もしも潜在ネットワーク $\bar{g}_z^a$ においてノード i がノード機能を失った場合，$B_i\left(\bar{g}_z^a\,|\,\bar{g}\right)=0$ とする。

また，g と s のもとでノード i が得る期待利得 $U_i(g, s)$ を以下のように定義する。

$$U_i(g, s)=\sum_{z=0}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-1}C_z}\left[P\left(\bar{g}_{z\{i\}}^a, S\right)B_i\left(\bar{g}_z^a\,|\,\bar{g}\right)\right]-s_i-\sum_{j\in N^d(i;g)}c_{ij}. \tag{1}$$

ここで，$\bar{g}_{z,\{i\}}^a$ は z 個のノードが機能を失うときにノード i はノード機能を失わない任意の潜在ネットワークを表している。(1) 式にて，c_{ij} は g においてリンク ij に対してノード i が拠出しているリンク形成費用であり，$\sum_{j\in N^d(i;g)}c_{ij}$ はノード i が拠出するリンク総維持費用である。ここで，$c_{ij}=c_{ji}>0$ であるとする。また，(1) 式の右辺第 1 項において，機能を失うノードの数が $n-1$ の場合までしか考慮されていない理由は，ノード i が機能を失う場合，ノード i はネットワーク便益を全く得ることができないので，ノード i を除く $n-1$ 個のノードの中から z 個のノードが機能を失う状況を考慮しているからである。また，$V_i(g, s)$ はネットワーク g においてノード i の得る期待総便益を表している。

次に，g と s のもとでのネットワーク価値 $W(g, s)$ を全てのノードの期待利得の合計として以下のように定義する。

$$W(g, s)=\sum_{i=1}^{n}U_i(g, s). \tag{2}$$

2　ノード機能喪失対策費用投入ゲーム

本節は「ノード機能喪失対策費用投入ゲーム」を分析する。ノード機能喪失対策費用投入ゲームでは，各ノードは g を所与として，自らの期待利得を最大にするようにノード機能喪失対策費用を投入する。

2.1　スーパーモジュラーゲーム

まず，ノード機能喪失対策費用ゲームにおいて戦略的補完性が存在することを示す。以下では，$\bar{g}_{z,\{i,\cdots,i_k\},-\{j_1,\cdots,j_e\}}^a$ は z 個のノードが機能を失うときにノード $i_1, \cdots, i_k$ はノード機能を失わず，ノード $j_1, \cdots, j_e$ はノード機能を失っている任意の潜在ネットワークをあらわすものとする。

また，$Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)\cup\{i\}$ と $I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)\setminus\{i\}$ からなる潜在ネットワークを $\hat{g}^a_{z+1,\{j\},-\{i\}}$ と記すことにする。したがって，潜在ネットワーク $\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}$ と潜在ネットワーク $\hat{g}^a_{z+1,\{j\},-\{i\}}$ の実現確率はそれぞれ以下のように表現することが出来る。

$$P\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}},s\right)=(1-\alpha_i)\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)\setminus\{i\}}(1-\alpha_y),$$

$$P\left(\hat{g}^a_{z+1,\{j\},-\{i\}},s\right)=\alpha_i\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)\setminus\{i\}}(1-\alpha_y).$$

次の補題 1 はノード j のノード機能喪失対策費用投入 s_j の変化がノード i のノード機能喪失対策費用投入 s_i に対してどのような影響を与えるのかを示している。

【補題 1】 任意のノード i，$j\neq i$ に関して $\dfrac{\partial^2 U_i(g,s)}{\partial s_i\partial s_j}>0$ かつ $\dfrac{\partial^2 U_i(g,s)}{\partial s_j^2}<0$ である。

証明)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_i(g,s)}{\partial s_i\partial s_j}=&\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}C_z}\left[\left((-\alpha_i')(-\alpha_j')\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)\setminus\{i,j\}}(1-\alpha_y)\right)\left(w_{ii}+\sum_{k\in N\left(i;\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}w_{ik}\right)\right]\\
&+\sum_{z=1}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}C_{z-1}}\left[\left(-\alpha_i'\alpha_j'\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i\},-\{j\}}\right)\setminus\{j\}}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i\},-\{j\}}\right)\setminus\{i\}}(1-\alpha_y)\right)\left(w_{ii}+\sum_{k\in N\left(i;\bar{g}^a_{z,\{i\},-\{j\}}\right)}w_{ik}\right)\right]\\
=&\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}C_z}\left[\left(\alpha_i'\alpha_j'\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)\setminus\{i,j\}}(1-\alpha_y)\right)\left(w_{ii}+\sum_{k\in N\left(i;\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}w_{ik}\right)\right]\\
&-\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}C_z}\left[\left(\alpha_i'\alpha_j'\prod_{x\in Z\left(\hat{g}^a_{z+1,\{i\},-\{j\}}\right)\setminus\{j\}}\alpha(s_x)\prod_{y\in I\left(\hat{g}^a_{z+1,\{i\},-\{j\}}\right)\setminus\{i\}}(1-\alpha_y)\right)\left(w_{ii}+\sum_{k\in N\left(i;\hat{g}^a_{z+1,\{i\},-\{j\}}\right)}w_{ik}\right)\right]\\
=&\sum_{z=0}^{n-3}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}C_z}\left[\left(\alpha_i'\alpha_j'\prod_{x\in Z\left(\hat{g}^a_{z+1,\{i\},-\{j\}}\right)\setminus\{j\}}\alpha(s_x)\prod_{y\in I\left(\hat{g}^a_{z+1,\{i\},-\{j\}}\right)\setminus\{i\}}(1-\alpha_y)\right)\left(\sum_{k\in N\left(i;\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}w_{ik}-\sum_{k\in N\left(i;\hat{g}^a_{z+1,\{i\},-\{j\}}\right)}w_{ik}\right)\right]\\
&+\alpha_i'\alpha_j'\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^1_{n-2,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\left(w_{ii}+\sum_{k\in N\left(i;\bar{g}^1_{n-2,\{i,j\}}\right)}w_{ik}\right)>0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_i(g,s)}{\partial s_j^2}=&\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}C_z}\left[\left((-\alpha_j'')\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)\setminus\{j\}}(1-\alpha_y)\right)\left(w_{ii}+\sum_{k\in N\left(i;\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}w_{ik}\right)\right]\\
&+\sum_{z=1}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}C_{z-1}}\left[\left(\alpha_j''\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i\},-\{j\}}\right)\setminus\{j\}}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i\},-\{j\}}\right)}(1-\alpha_y)\right)\left(w_{ii}+\sum_{k\in N\left(i;\bar{g}^a_{z,\{i\},-\{j\}}\right)}w_{ik}\right)\right]\\
=&\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}C_z}\left[\left((-\alpha_j'')\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)\setminus\{j\}}(1-\alpha_y)\right)\left(w_{ii}+\sum_{k\in N\left(i;\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}w_{ik}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$+\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}C_z}\left[\left(\alpha_j''\prod_{x\in Z\left(\hat{g}^a_{z+1,\{i\},-\{j\}}\right)\setminus\{j\}}\alpha\left(s_x\right)\prod_{y\in I\left(\hat{g}^a_{z+1,\{i\},-\{j\}}\right)}\left(1-\alpha_y\right)\right)\left(w_{ii}+\sum_{k\in N\left(i;\hat{g}^a_{z+1,\{i\},-\{j\}}\right)}w_{ik}\right)\right]$$

$$=\sum_{z=0}^{n-3}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}C_z}\left[\left(\alpha_j''\prod_{x\in Z\left(\hat{g}^a_{z+1,\{i\},-\{j\}}\right)\setminus\{j\}}\alpha\left(s_x\right)\prod_{y\in I\left(\hat{g}^a_{z+1,\{i\},-\{j\}}\right)\setminus\{i\}}\left(1-\alpha_y\right)\right)\left(\sum_{k\in N\left(i;\hat{g}^a_{z+1,\{i\},-\{j\}}\right)}w_{ik}-\sum_{k\in N\left(i;\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}w_{ik}\right)\right]$$

$$-\alpha_j''\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^1_{n-2,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\left(w_{ii}+\sum_{k\in N\left(i;\bar{g}^1_{n-2,\{i,j\}}\right)}w_{ik}\right)<0$$

Q.E.D.

補題 1 の $\partial^2 U_i(g,s)/\partial s_i \partial s_j > 0$ は戦略的補完性を示しており，ノード i が s_i のノード機能喪失対策費用投入を行って自身の期待利得の最大化を行っていた場合，ノード j のノード機能喪失対策費用投入 s_j の変化はノード i の限界利得を変化させるので，以前の s_i のもとでは期待利得は最大化されなくなるため s_i を変化させる必要があるということを示唆している。たとえば，ノード i が s_i のノード機能喪失対策費用投入を行って自身の期待利得の最大化を行っていたとしよう。もしも s_j が増加したならばノード i の限界利得は以前と比べて増加するので，ノード i は期待利得の最大化を行うためには s_i を増加させなければならない。

次に，以下の補題 2 はノード i 以外の全てのノードがノード機能喪失対策費用投入を変化させた場合にはノード i のノード機能喪失対策費用投入 s_i がどのように変化するのかを述べたものである。

【補題 2】ノード i 以外のすべてのノードがノード機能喪失対策費用投入を増加させたならば，ノード i も s_i を増加させる。

証明）いま，任意のノード $j \neq i$ がノード機能喪失対策費用投入を増加させたとしよう。このとき $\partial U_i(g,s)/\partial s_i$ を全微分し，s_i の変化を 0 とすると以下の式が得られる。

$$d\left(\frac{\partial U_i(g,s)}{\partial s_i}\right)=\sum_{j=1:j\neq i}^{n}\frac{\partial^2 U_i(g,s)}{\partial s_j \partial s_i}ds_j$$

$$=\frac{\partial^2 U_i(g,s)}{\partial s_1 \partial s_i}ds_1+\cdots+\frac{\partial^2 U_i(g,s)}{\partial s_{i-1}\partial s_i}ds_{i-1}+\frac{\partial^2 U_i(g,s)}{\partial s_{i+1}\partial s_i}ds_{i+1}+\cdots$$

$$+\frac{\partial^2 U_i(g,s)}{\partial s_n \partial s_i}ds_n>0.$$

すなわち，ノード i が s_i のもとで自身の期待利得の最大化を行っていた場合，ノード i 以外のすべてのノードがノード機能喪失対策費用投入を増加させたならば，$\partial U_i(g,s)/\partial s_i > 0$ であるので，ノード i は期待利得を最大化するために s_i を増加させる。

Q.E.D

【命題 1】ノード機能喪失対策費用投入ゲームはスーパーモジュラーゲームであり，任意の g を所与として，ノード機能喪失対策費用投入ゲームにおいて最大と最小のナッシュ均衡が存在する。

証明) s_i はノード i のノード機能喪失対策費用投入戦略の集合であり実数上の区間である。また，ノード i の期待利得 $U_i(g,s)$ は s_i に関して 2 回連続微分可能である。さらに補題 1 より，$\partial^2 U_i(g,s)/\partial s_i \partial s_j > 0$ である。以上を踏まえると，Milgrom and Roberts (1990) の定理 4 より，ノード機能喪失対策費用投入ゲームはスーパーモジュラーゲームであることが示される[8)]。また，Milgrom and Roberts (1990) の定理 5 より，スーパーモジュラーゲームにおいて最大と最小のナッシュ均衡が存在することが保証される。

Q.E.D.

ノード機能喪失対策費用投入ゲームにおいてナッシュ均衡が存在することが示されたので，次節ではノード機能喪失対策費用投入ゲームにおいてナッシュ均衡と効率性の同時達成問題について分析する。

2.2　ノード機能喪失対策費用投入ゲームにおける均衡と効率性

まず g を所与として，ノード i を除く全てのノードのノード機能喪失対策費用投入の組 $s_{-i}=(s_1,\cdots,s_{i-1},s_{i+1},\cdots,s_n)$ を所与として，ノード i の期待利得最大化条件を導出する。

$$\frac{\partial U_i(g,(s_i,s_{-i}))}{\partial s_i}=\sum_{z=0}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-1}C_z}\left[\frac{\partial P(\bar{g}^a_{z,\{i\}},(s_i,s_{-i}))}{\partial s_i}B_i(\bar{g}^a_{z,\{i\}}|\bar{g})\right]-1$$
$$=\sum_{z=0}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-1}C_z}\left[\left(-\alpha_i'\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}\right)\setminus\{i\}}\left(1-\alpha_y\right)\right)B_i\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}|\bar{g}\right)\right]-1.$$

上式から最大化条件は以下のようになる。

$$\sum_{z=0}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-1}C_z}\left[-\alpha_i'\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}\right)\setminus\{i\}}\left(1-\alpha_y\right)B_i\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}|\bar{g}\right)\right]=1. \tag{3}$$

---

8)　ゲームにおいて n 人のプレイヤーが存在し，プレイヤー i は k_i 個の要素からなる戦略 $x_i=\left(x_i^1,\ldots,x_i^{k_i}\right)$ を持ち，プレイヤー i の戦略集合を S_i，利得関数 $f_i(x_i,x_{-i})$ とする。任意のプレイヤー i に関して以下を満たすならば，そのゲームはスーパーモジュラーゲームである。

1. 戦略集合 S_i は R^{k_i} における区間である。すなわち，$S_i=\left[\underline{y}_i,\bar{y}_i\right]$
2. $f_i(x_i,x_{-i})$ は S_i に関して 2 回連続微分可能である。
3. 任意の i と $1\le s\le t\le k_i$ である任意の s，t に関して，$\partial^2 f_i/\partial x_i^s \partial x_i^t \ge 0$ である。
4. 任意の i，$j\ne i$ と，$1\le s\le k_i$，$1\le t\le k_i$ である任意の s，t に関して，$\partial^2 f_i/\partial x_i^s \partial x_j^t \ge 0$ である。

次に g を所与として，$s^*=\left(s_l^*,\ldots,s_n^*\right)$ がナッシュ均衡となる状況を考える。いま，$s^*=\left(s_l^*,\ldots,s_n^*\right)$ がナッシュ均衡であるならば，任意のノード i，j について以下の (4) 式が成立しなければならない。

$$\frac{\partial U_i(g,s^*)}{\partial s_i^*}=\frac{\partial U_j(g,s^*)}{\partial s_j^*}=0. \tag{4}$$

次に，g を所与として，ネットワーク価値が最大化されている場合，以下が成立していなければならない。

$s^E=\left(s_l^E,\cdots,s_n^E\right)$ であるとき，任意の $i\neq j$ であるノード i，j に対して

$$\frac{\partial W\left(g,s^E\right)}{\partial s_i^E}=\frac{\partial W\left(g,s^E\right)}{\partial s_j^E}=0. \tag{5}$$

(5) 式を変形することで次の (6) 式を得る。

$$\frac{\partial U_i\left(g,s^E\right)}{\partial s_i^E}+\sum_{\varepsilon\in N\setminus\{i\}}\left(\frac{\partial U_\varepsilon\left(g,s^E\right)}{\partial s_i^E}\right)=\frac{\partial U_j\left(g,s^E\right)}{\partial s_j^E}+\sum_{\tau\in N\setminus\{j\}}\left(\frac{\partial U_\tau\left(g,s^E\right)}{\partial s_j^E}\right). \tag{6}$$

本稿では (6) 式が成立しているならば $s^E=\left(s_l^E,\cdots,s_n^E\right)$ は効率的であると呼ぶことにする。

次の命題 2 はノード機能喪失対策費用投入ゲームにおける効率的な戦略の組 s^E が唯一であり，s^E の下でネットワーク価値が最大化されることを保障するものである。

【命題 2】ノード機能喪失対策費用投入において $s^E=\left(s_l^E,\cdots,s_n^E\right)$ の下でネットワーク価値 $W(g,s^E)$ は唯一の最大値となる。

証明) いま，$x,y\in S_i$ であり，$\lambda\in[0,1]$ であるとする。このとき，任意の $x,y\in S_i$，$\lambda\in[0,1]$ に関して，$U_i(g,(\lambda x+(1-\lambda)y,s_{-i}))>\lambda U_i(g,(x,s_{-i}))+(1-\lambda)U_i(g,(y,s_{-i}))$ が成立する。

$$\begin{aligned}&U_i(g,(\lambda x+(1-\lambda)y,s_{-i}))-\lambda U_i(g,(x,s_{-i}))-(1-\lambda)U_i(g,(y,s_{-i}))\\&=\sum_{z=0}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-1}C_z}\Big\{B_i\left(h_{z,\{i\}}^a\,|\,h\right)\Big[P\left(h_{z,\{i\}}^a,(\lambda x+(1-\lambda)y,s_{-i})\right)-\lambda P\left(h_{z,\{i\}}^a,(x,s_{-i})\right)\\&\qquad-(1-\lambda)P\left(h_{z,\{i\}}^a,(y,s_{-i})\right)\Big]\Big\}.\end{aligned}$$

ここで，$P\left(h_{z,\{i\}}^a,(s_i,s_{-i})\right)$ は s_i について狭義凹関数であるので，

$$P\left(h_{z,\{i\}}^a,(\lambda x+(1-\lambda)y,s_{-i})\right)-\lambda P\left(h_{z,\{i\}}^a,(x,s_{-i})\right)-(1-\lambda)P\left(h_{z,\{i\}}^a,(y,s_{-i})\right)>0$$

が成立する。すなわち，$U_i(g,s)$ は s_i に関して狭義凹関数である。

次に，$U_i(g,s)$ は s_i に関して狭義凹関数であるので，ネットワーク価値 $W(g,s^E)$ は s に関して狭義凹関数となる。狭義凹関数の性質から，任意の $i\neq j$ であるノード i，j に対して (5)

式を満たす $s^E=\left(s_l^E,\cdots,s_n^E\right)$ の下で $W(g,s^E)$ は唯一の最大値をとる。

Q.E.D.

ノード機能喪失対策費用投入ゲームにおいてナッシュ均衡と効率性が同時に達成できるか否かは重要な問題である。命題 3 はその問題に対する解答である。

【命題 3】 ノード機能喪失対策費用投入において empty ネットワーク[9)] はナッシュ均衡と効率性を常に同時達成する。一方，empty ネットワークではない任意のネットワークはナッシュ均衡と効率性を同時達成できない。

証明）いま，任意の g を所与として，$s^{E*}=\left(s_l^{E*},\cdots,s_n^{E*}\right)$ がナッシュ均衡であり，かつ効率的となる条件を求める。g を所与として，$s^{E*}=\left(s_l^{E*},\cdots,s_n^{E*}\right)$ がナッシュ均衡であり，かつ効率的となる必要十分条件は以下である。

任意の $i\neq j$ であるノード i，j に対して，$s^{E*}=\left(s_l^{E*},\cdots,s_n^{E*}\right)$ のもとで

$$\frac{\partial U_i\left(g,s^{E*}\right)}{\partial s_i^{E*}}=\frac{\partial U_i\left(g,s^{E*}\right)}{\partial s_j^{E*}}=0,$$

$$\sum_{\varepsilon\in N\setminus\{i\}}\left(\frac{\partial U_\varepsilon\left(g,s^{E*}\right)}{\partial s_i^{E*}}\right)=\sum_{\tau\in N\setminus\{j\}}\left(\frac{\partial U_\tau\left(g,s^{E*}\right)}{\partial s_j^{E*}}\right)=0$$

が同時に満たされる。

いま任意の g のもとで，任意の $i\neq j$ であるノード i，j に関して $\partial U_j(g,s)/\partial s_i$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_j(g,s)}{\partial s_i}=&\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}C_z}\left[-\alpha_i'\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)\setminus\{i\}}\left(1-\alpha_y\right)B_j\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}|\bar{g}\right)\right]\\&+\sum_{z=1}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}C_{z-1}}\left[\alpha_i'\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{j\},-\{i\}}\right)\setminus\{i\}}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{j\},-\{i\}}\right)}\left(1-\alpha_y\right)B_j\left(\bar{g}^a_{z,\{j\},-\{i\}}|\bar{g}\right)\right].\\=&\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}C_z}\left[-\alpha_i'\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{h}^a_{z,\{i,j\}}\right)\setminus\{i\}}\left(1-\alpha_y\right)B_j\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}|\bar{g}\right)\right]\\&+\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}C_z}\left[\alpha_i'\prod_{x\in Z\left(\hat{g}^a_{z+1,\{j\},-\{i\}}\right)\setminus\{i\}}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\hat{g}^a_{z+1,\{j\},-\{i\}}\right)}\left(1-\alpha_y\right)B_j\left(\hat{g}^a_{z+1,\{j\},-\{i\}}|\bar{g}\right)\right]\end{aligned}\tag{7}$$

9) 任意のノード i，$j\in N$ に関して $\bar{g}_{ij}=0$ であるネットワークを empty ネットワークと呼ぶ。すなわち，任意のノード間にリンクが形成されていないネットワークである。

$$=\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}C_z}\left[\alpha_i'\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{h}^a_{z,\{i,j\}}\right)\setminus\{i\}}\left(1-\alpha_y\right)\left[B_j\left(\hat{g}^a_{z+1,\{j\},-\{i\}}|\bar{g}\right)-B_j\left(g^a_{z,\{i,j\}}|\bar{g}\right)\right]\right]\geq 0.$$

上式が 0 と等しくなる状況は，g においてノード i とノード j の間に経路が存在しない状況のみである。もしも g が empty ネットワークならば，任意のノード間に経路が存在しないので，任意のノード i に関して $\partial U_i\left(g,s^{E^*}\right)/\partial s_i^{E^*}=0$ かつ $\sum_{j\in N\setminus\{i\}}\left(\partial U_j\left(g,s^{E^*}\right)/\partial s_i^{E^*}\right)=0$ が成立する。一方，g が empty ネットワークではないならば，g においてあるノード i，j 間にリンクが存在するので $\partial U_j(g,s)/\partial s_i>0$，$\sum_{j\in N\setminus\{i\}}\left(\partial U_j(g,s)/\partial s_i\right)>0$ となり，ナッシュ均衡と効率性の同時達成条件を満たさない。よって，ノード機能喪失対策費用投入ゲームにおいてナッシュ均衡と効率性を同時に達成できるのは empty ネットワークだけである。

Q.E.D.

命題 3 が成立する原因は次のように解釈することが出来る。empty ネットワークではない任意のネットワークにおいて，ノード機能喪失対策費用投入ゲームにおいて効率性が達成されているならば任意のノード i に関して

$$\frac{\partial U_i\left(g,s^E\right)}{\partial s_i^E}+\sum_{\varepsilon\in N\setminus\{i\}}\left(\frac{\partial U_\varepsilon\left(g,s^E\right)}{\partial s_i^E}\right)=0$$

が成立していなければならない。ここで，$\partial U_j(g,s)/\partial s_i>0$ であるので，$\sum_{j\in N\setminus\{i\}}\left(\partial U_j\left(g,s^E\right)/\partial s_i^E\right)>0$ となるため，効率性が達成されるためには $\partial U_i\left(g,s^E\right)/\partial s_i^E<0$ でなければならない。このことは，ノード機能喪失対策費用投入ゲームにおいて効率性を達成するためには，各ノードは自らの期待効用を最大化するノード機能喪失対策費用投入よりも過剰に費用を投入しなければならないということである。したがって，empty ネットワークではない任意のネットワークにおいて，ノード機能喪失対策費用投入ゲームにおいてナッシュ均衡と効率性は同時達成されないのである。

以下では，ネットワークにおける各ノードのリンク形成状況によってノード機能喪失対策費用投入がどのように異なってくるのかを見ていこう。

【補題 3】 任意のノード i，$j\in N$ に関して $w_{ii}=w_{jj}$ であるとしよう。このとき，$I\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}\right)\setminus\{i\}=I\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}\right)\setminus\{j\}$ かつ $Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}\right)\setminus\{i\}=Z\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}\right)\setminus\{j\}$ である任意の $\bar{g}^a_{z,\{i\}}$ と $\bar{g}^a_{z,\{j\}}$ に関して，$B_i\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}|\bar{g}\right)\geq B_j\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}|\bar{g}\right)$ ならば，$N(i;\bar{g})\supseteq N(j;\bar{g})$ である。

証明）各ノードは同質であり，$w_{ii}=w_{jj}$ であるとする。いま $k\in N(j;\bar{g})$ だが $k\notin N(i;\bar{g})$ であるようなノード k が存在すると仮定しよう。もしもノード i とノード k 以外の全てのノード

が機能を失った場合，$B_i\left(\bar{g}^a_{n-2,\{i,k\}}|\bar{g}\right)=w_{ii}$ となる。一方，ノード j とノード k 以外の全てのノードが機能を失った場合，$B_j\left(\bar{g}^a_{n-2,\{j,k\}}|\bar{g}\right)=w_{jj}+w_{kj}$ となる。$w_{ii}=w_{jj}$ であるので，$B_i\left(\bar{g}^a_{n-2,\{i,k\}}|\bar{g}\right)<B_i\left(\bar{g}^a_{n-2,\{i,k\}}|\bar{g}\right)$ となる。よって対偶により示された。

Q.E.D.

以下の命題 4 はあるネットワークにおいて，あるノード i が直接リンクを形成している任意のノードとは全てリンクを形成し，それ以外のノードとも直接リンクを形成しているノード j は，ナッシュ均衡においてノード i と比較してどのようなノード機能喪失対策費用投入を行っているのかを示している。

【命題 4】 s^* がナッシュ均衡ならば，$I\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}\right)\backslash\{i\}=I\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}\right)\backslash\{j\}$ かつ $Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}\right)\backslash\{i\}=Z\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}\right)\backslash\{j\}$ である任意の潜在ネットワーク $\bar{g}^a_{z,\{i\}}$ と $\bar{g}^a_{z,\{j\}}$ に関して $B_i\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}|\bar{g}\right)\geq B_j\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}|\bar{g}\right)$ である $\bar{g}$ の下では，ノード i，j のノード機能喪失対策費用投入は $s^*_i\geq s^*_j$ である。

証明）いま，s^* がナッシュ均衡であり，$I\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}\right)\backslash\{i\}=I\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}\right)\backslash\{j\}$ かつ $Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}\right)\backslash\{i\}=Z\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}\right)\backslash\{j\}$ である任意の潜在ネットワーク $\bar{g}^a_{z,\{i\}}$ と $\bar{g}^a_{z,\{j\}}$ に関して $B_i\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}|\bar{g}\right)\geq B_j\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}|\bar{g}\right)$ が成立すると仮定する。s^* がナッシュ均衡であるので，任意のノード i，j に関して以下のことが成立している。

$$\sum_{z=0}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-1}C_z}\left[-\alpha'_i\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}\right)\backslash\{i\}}\left(1-\alpha_y\right)B_i\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}|\bar{g}\right)\right]=-1. \tag{8}$$

$$\sum_{z=0}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-1}C_z}\left[-\alpha'_j\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}\right)\backslash\{j\}}\left(1-\alpha_y\right)B_j\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}|\bar{g}\right)\right]=-1. \tag{9}$$

いま，$B_i\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}|\bar{g}\right)>B_j\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}|\bar{g}\right)$ であると仮定し，(8) 式=(9) 式として以下のように変形する。

$$\begin{aligned}
&\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}C_z}\left[-\alpha'_i\left(1-\alpha_j\right)\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(h^a_{z,\{i,j\}}\right)\backslash\{i,j\}}\left(1-\alpha_y\right)B_i\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}|\bar{g}\right)\right]\\
&+\sum_{z=1}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}C_{z-1}}\left[-\alpha'_i\alpha_j\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i\},-\{j\}}\right)\backslash\{j\}}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i\},-\{j\}}\right)\backslash\{i\}}\left(1-\alpha_y\right)B_i\left(\bar{g}^a_{z,\{i\},-\{j\}}|\bar{g}\right)\right]\\
&=\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}C_z}\left[-\alpha'_j\left(1-\alpha_i\right)\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)\backslash\{i,j\}}\left(1-\alpha_y\right)B_j\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}|\bar{g}\right)\right]\\
&+\sum_{z=1}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}C_{z-1}}\left[-\alpha'_j\alpha_i\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{j\},-\{i\}}\right)\backslash\{i\}}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{j\},-\{i\}}\right)\backslash\{j\}}\left(1-\alpha_y\right)B_j\left(\bar{g}^a_{z,\{j\},-\{i\}}|\bar{g}\right)\right].
\end{aligned}$$

上式をさらに次のように変形する。

$$\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}C_z}\Bigg\{\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)\backslash\{i,j\}}\left(1-\alpha_y\right)$$
$$\left[-\alpha_i'\left(1-\alpha_j\right)B_i\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}|\bar{g}\right)+\alpha_j'\left(1-\alpha_i\right)B_j\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}|\bar{g}\right)\right]\Bigg\}$$
$$+\sum_{z=1}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}C_{z-1}}\Bigg\{\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i\},-\{j\}}\right)\backslash\{j\}}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i\},-\{j\}}\right)\backslash\{i\}}\left(1-\alpha_y\right)$$
$$\left[-\alpha_i'\alpha_jB_i\left(\bar{g}^a_{z,\{i\},-\{j\}}|\bar{g}\right)+\alpha_j'\alpha_iB_j\left(\bar{g}^a_{z,\{j\},-\{i\}}|\bar{g}\right)\right]\Bigg\}=0.$$

上式を次のように変形する。

$$\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}C_z}\Bigg\{\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)\backslash\{i,j\}}\left(1-\alpha_y\right)$$
$$\left[-\alpha_i'\left(1-\alpha_j\right)B_i\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}|\bar{g}\right)+\alpha_j'\left(1-\alpha_i\right)B_j\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}|\bar{g}\right)\right]\Bigg\}$$
$$+\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}C_z}\Bigg\{\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z+1,\{i\},-\{j\}}\right)\backslash\{j\}}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\hat{g}^a_{z+1,\{i\},-\{j\}}\right)\backslash\{i\}}\left(1-\alpha_y\right)$$
$$\left[-\alpha_i'\alpha_jB_i\left(\hat{g}^a_{z+1,\{i\},-\{j\}}|\bar{g}\right)+\alpha_j'\alpha_iB_j\left(\hat{g}^a_{z+1,\{j\},-\{i\}}|\bar{g}\right)\right]\Bigg\}=0.$$

さらに変形することで次の式を得る。

$$\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}C_z}\Bigg\{\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)\backslash\{i,j\}}\left(1-\alpha_y\right)\left[-\alpha_i'B_i\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}|\bar{g}\right)+\alpha_j'B_j\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}|\bar{g}\right)\right]\Bigg\}=0. \quad (10)$$

いま，$B_i\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}|\bar{g}\right)\geq B_j\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}|\bar{g}\right)$ であると仮定しているので，(10) 式が成立するためには $s_i^*\geq s_j^*$ でなければならない。

Q.E.D.

以下の命題 5 はあるネットワークにおいて，あるノード i が直接リンクを形成している任意のノードとは全てリンクを形成し，それ以外のノードとも直接リンクを形成しているノード j は，効率性が達成されるときにノード i と比較してどのようなノード機能喪失対策費用投入を行っているのかを示している。

【命題 5】 任意のノード i，$j\in N$ に関して $w_{ii}=w_{jj}$ であるとしよう。s^E が効率的ならば，$I\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}\right)\backslash\{i\}=I\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}\right)\backslash\{j\}$ かつ $Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}\right)\backslash\{i\}=Z\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}\right)\backslash\{j\}$ である任意の潜在ネットワーク $\bar{g}^a_{z,\{i\}}$ と $\bar{g}^a_{z,\{j\}}$ に関して $B_i\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}|\bar{g}\right)\geq B_j\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}|\bar{g}\right)$ である $\bar{g}$ の下では，ノード i，j のノード機能喪失対策費用投入は $s_i^E\geq s_j^E$ である。

証明) いま，任意のノード i，$j \in N$ に関して $w_{ii}=w_{jj}$ であり，s^E が効率的であるとしよう。s^E が効率的であるので，任意のノード i，$j \in N$ に関して以下が成立しなければならない。

$$\left[\frac{\partial U_i\left(g,s^E\right)}{\partial s_i^E}-\frac{\partial U_j\left(g,s^E\right)}{\partial s_j^E}\right]+\left[\sum_{\varepsilon \in N \setminus \{i\}}\left(\frac{\partial U_\varepsilon\left(g,s^E\right)}{\partial s_i^E}\right)-\sum_{\tau \in N \setminus \{j\}}\left(\frac{\partial U_\tau\left(g,s^E\right)}{\partial s_j^E}\right)\right]=0. \quad (11)$$

いま，$s_i^E=s_j^E$ であるとしよう。このとき，(11) 式の第 1 項目は命題 4 から $s_i^E=s_j^E$ ならば正の値をとることがわかる。一方，(11) 式の第 2 項目の大小関係を以下で確認する。

ここで，任意のノード i，$j \in N$ に関して $\partial U_\varepsilon\left(g,s^E\right)/\partial s_i^E-\partial U_\varepsilon\left(g,s^E\right)/\partial s_j^E$ を計算する。

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U_\varepsilon(g,s)}{\partial s_i^E}-\frac{\partial U_\varepsilon(g,s)}{\partial s_j^E}\\
&=\left(-\alpha_i'+\alpha_j'\right)\sum_{z=0}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-1}C_z}\left[\prod_{x \in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y \in I\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i,j\}}\right)\setminus\{i,j\}}\left(1-\alpha_y\right)B_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i,j\}}|\bar{g}\right)\right]\\
&+\left(-\alpha_i'-\alpha_j'\right)\sum_{z=1}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-1}C_z}\left[\prod_{x \in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)\setminus\{j\}}\alpha_x\prod_{y \in I\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)\setminus\{i\}}\left(1-\alpha_y\right)B_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}|\bar{g}\right)\right]\\
&+\left(\alpha_i'+\alpha_j'\right)\sum_{z=1}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-1}C_z}\left[\prod_{x \in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\right)\setminus\{i\}}\alpha_x\prod_{y \in I\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\right)\setminus\{j\}}\left(1-\alpha_y\right)B_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}|\bar{g}\right)\right]\\
&+\left(\alpha_i'-\alpha_j'\right)\sum_{z=2}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-1}C_z}\left[\prod_{x \in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon\},-\{i,j\}}\right)\setminus\{i,j\}}\alpha_x\prod_{y \in I\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon\},-\{i,j\}}\right)}\left(1-\alpha_y\right)B_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z\{\varepsilon\},-\{i,j\}}|\bar{g}\right)\right]
\end{aligned}$$

以下のように変形する。

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U_\varepsilon(g,s)}{\partial s_i^E}-\frac{\partial U_\varepsilon(g,s)}{\partial s_j^E}\\
&=\left(-\alpha_i'+\alpha_j'\right)\sum_{z=0}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-1}C_z}\left[\prod_{x \in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y \in I\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i,j\}}\right)\setminus\{i,j\}}\left(1-\alpha_y\right)B_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i,j\}}|\bar{g}\right)\right]\\
&+\left(-\alpha_i'\alpha_j-\alpha_j'\left(1-\alpha_i\right)\right)\sum_{z=1}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-1}C_z}\left[\hat{p}\left(\bar{g}^a_z\right)B_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}|\bar{g}\right)\right]\\
&+\left(\alpha_i'\left(1-\alpha_j\right)+\alpha_j'\alpha_i\right)\sum_{z=1}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-1}C_z}\left[\hat{p}\left(\bar{g}^a_z\right)B_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}|\bar{g}\right)\right]\\
&+\left(\alpha_i'-\alpha_j'\right)\sum_{z=2}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-1}C_z}\left[\prod_{x \in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon\},-\{i,j\}}\right)\setminus\{i,j\}}\alpha_x\prod_{y \in I\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon\},-\{i,j\}}\right)}\left(1-\alpha_y\right)B_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z\{\varepsilon\},-\{i,j\}}|\bar{g}\right)\right]
\end{aligned}$$

$\hat{p}\left(\bar{g}^a_z\right)$ は $I\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)\setminus\{i\}=I\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\right)\setminus\{j\}$ と $Z\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)\setminus\{j\}=Z\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\right)\setminus\{i\}$ から与えられる任意の $\prod_{x \in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y \in I\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\right)}\left(1-\alpha_y\right)$ を表している。ここで，$s_i^E=s_j^E$ であるので，以

下のようになる。

$$\frac{\partial U_\varepsilon(g,s)}{\partial s_i^E}-\frac{\partial U_\varepsilon(g,s)}{\partial s_j^E}=\sum_{z=1}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-1}C_z}\hat{p}\left(\bar{g}_z^a\right)\left[\alpha_i' B_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}|\bar{g}\right)-\alpha_j' B_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}|\bar{g}\right)\right]$$

ここで，$B_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}|\bar{g}\right)$ と $B_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}|\bar{g}\right)$ の大小関係を見る。$l_{\varepsilon j}\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)$ が存在する任意の $\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}$ においては，$V_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}|\bar{g}\right)=V_i\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}|\bar{g}\right)$ である。また $w_{ii}=w_{jj}$，$I\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}\right)\backslash\{i\}=I\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}\right)\backslash\{j\}$ かつ $Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}\right)\backslash\{i\}=Z\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}\right)\backslash\{j\}$ である任意の潜在ネットワーク $\bar{g}^a_{z,\{i\}}$ と $\bar{g}^a_{z,\{j\}}$ に関して $B_i\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}|\bar{g}\right)\geq B_j\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}|\bar{g}\right)$ を仮定しているので，$V_i\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}|\bar{g}\right)\geq V_j\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}|\bar{g}\right)$ である。一方，$l_{\varepsilon j}\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\right)$ が存在する $\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}$ では $V_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}|\bar{g}\right)=V_j\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}|\bar{g}\right)$ である。すなわち，$l_{\varepsilon j}\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)$ が存在する任意の $\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}$ と $l_{\varepsilon j}\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\right)$ が存在する $\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}$ においては $V_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}|\bar{g}\right)\geq V_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}|\bar{g}\right)$ である。次に $l_{\varepsilon j}\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\right)$ が存在しない任意の $\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}$ では，経路の存在するノード $k\neq i,j,\varepsilon$ と同じ総便益をネットワークから得る。したがって，$V_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}|\bar{g}\right)=V_k\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}|\bar{g}\right)$ である。ここで，$l_{\varepsilon j}\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\right)$ が存在しない任意の $\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}$ における $I\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\right)\backslash\{j\}$ と $Z\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\right)\backslash\{i\}$ から構成される $l_{\varepsilon j}\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)$ が存在する任意の $\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}$ においては，$V_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}|\bar{g}\right)\geq V_k\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}|\bar{g}\right)$ となる。なぜならば，これらの潜在ネットワークにおける相違はノード i もしくはノード j のどちらが機能を失っているかという点だけであり，他のノードの機能喪失状況は全く同じである。したがって，$l_{\varepsilon j}\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\right)$ が存在しない $\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}$ で便益を得ていたノード $k\neq i,j,\varepsilon$ とも $l_{\varepsilon j}\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)$ が存在する $\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}$ において便益を得ることができる。さらに，この $\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}$ では $l_{\varepsilon j}\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)$ が存在しているので，ノード j を経由して他のノードから便益を得ることができるかもしれない。したがって，$V_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}|\bar{g}\right)\geq V_k\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}|\bar{g}\right)$ となる。

次に $l_{\varepsilon i}\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)$ が存在しない任意の $\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}$ について考える。$l_{\varepsilon i}\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)$ が存在しない任意の $\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}$ においては，経路の存在するノード $k\neq i,j,\varepsilon$ と同じ総便益をネットワークから得る。したがって，$V_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}|\bar{g}\right)=V_k\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}|\bar{g}\right)$ である。ここで，ノード i がノード機能を失っていないにもかかわらず，$l_{\varepsilon i}\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)$ が存在しないということは，$l_{\varepsilon i}\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)$ が存在しない任意の $\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}$ における $I\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)\backslash\{i\}$ と $Z\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)\backslash\{j\}$ から構成される任意の $\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}$ においては，$l_{\varepsilon j}\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\right)$ もまた存在しない。なぜならば，補題3からノード i はノード j が直接リンクを持つ全てのノードとはリンクを形成しているはずであり，$l_{\varepsilon i}\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)$ が存在しないということは，ノード ε とノード j が直接リンクを持つ全てのノードとの経路が存在していないことを意味する。すなわち，$V_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}|\bar{g}\right)=V_k\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}|\bar{g}\right)$ である。したがって，$V_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}|\bar{g}\right)=V_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}|\bar{g}\right)$ である。

以上より，任意の$I\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)\backslash\{i\}=I\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\right)\backslash\{j\}$かつ$Z\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)\backslash\{i\}=Z\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\right)\backslash\{j\}$である任意の潜在ネットワーク $\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}$ と $\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}$ に関して$B_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}|\bar{g}\right)\geq B_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}|\bar{g}\right)$が成立する。したがって，

$$\frac{\partial U_\varepsilon(g,s)}{\partial s_i^E}-\frac{\partial U_\varepsilon(g,s)}{\partial s_j^E}=\sum_{z=1}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-1}C_z}\hat{p}\left(\bar{g}^a_z\right)\left[\alpha_i' B_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}|\bar{g}\right)-\alpha_j' B_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}|\bar{g}\right)\right]\geq 0.$$

補題 1 から，$\partial^2 U_i(g,s)/\partial s_j^2<0$ なので，s_i^E を増加させることで $\partial U_\varepsilon(g,s)/\partial s_i^E$ は減少する。したがって，(11) 式を満たすためには $s_i^E\geq s_j^E$ でなければならない。

Q.E.D.

命題 4 と命題 5 からは，ネットワークにおいて，他のノードと比較して厳密にネットワークにおいて大きな影響を与える重要なノードは，ナッシュ均衡が達成されている状況と効率性が達成されている状況のどちらにおいても，より多くのノード機能喪失対策費用投入を行っていることが確認される。

2.3　ノード機能喪失対策費用投入ゲームの動学プロセスと収束性

以下で示す動学プロセスの下では，ノード機能喪失対策費用投入ゲームはナッシュ均衡に対して一意に収束することを示す。

2.3.1　動学プロセス

ノード機能喪失対策費用投入ゲームは以下の動学プロセスに従い行われるものとする。g を所与として，各 $t=1,2,\cdots$ 期にノード機能喪失対策費用投入ゲームを行う。ここで，t 期におけるノード機能喪失対策費用投入ゲームにおいて，ノード i のノード機能喪失対策費用投入を s_i^t と記す。各 t 期において，各ノードは近視眼的であり，$t-1$ 期における他のノードのノード機能喪失対策費用投入を所与として自身の t 期における期待利得を最大化しようとする。つまり，t 期において任意のノード i は $s_{-i}^{t-1}=\left(s_1^{t-1},\cdots,s_{i-1}^{t-1},s_{i+1}^{t-1},\cdots,s_n^{t-1}\right)$ を所与としてノード機能喪失対策費用投入 s_i^t を決定する。すなわち，t 期における任意のノード i のノード機能喪失対策費用投入 s_i^t は以下で与えられる。

$$s_i^t\in\arg\max_{s_i'^t\in s_i} U_i^t\left(g,\left(s_{-i}^{t-1},s_i'^t\right)\right).$$

ここで，$t=0$ 期においては，すべてのノードはノード機能喪失対策費用を投入しておらず $s^0=(0,\cdots,0)$ であるとする。

2.3.2　ノード機能喪失対策費用投入ゲームの収束性

次の命題6は，上述の動学プロセスのもとで，ゲームが一意に収束することを示している。

【命題6】上述の動学プロセスのもとで，ノード機能喪失対策費用投入ゲームはナッシュ均衡 $s^*=\left(s_1^*,\cdots,s_n^*\right)$ へ一意に収束する。

証明) まず，$t=1$ 期を考える。$t=1$ 期におけるノード機能喪失対策費用投入ゲームの各ノードは厳密に正のノード機能喪失対策費用投入を行う。なぜならば，モデルの仮定から $\lim_{s_i\to 0}\alpha_i'=-\infty$ であるので $\lim_{s_i\to 0}U_i'(g,s)=\infty$ となるからである。すなわち，任意のノード i に関して $s_i^1>0$ である。$t=2$ 期においては，任意のノード i は $s_{-i}^1=\left(s_1^1,\cdots,s_{i-1}^1,s_{i+1}^1,\cdots,s_n^1\right)$ を所与として自身の期待利得を最大化しようとする。ここで，$t=1$ 期と比べて他の全てのノードのノード機能喪失対策費用投入は増加しているので，補題2から任意のノード i は自身の期待利得を最大化するために s_i を増加させるので $s_i^2>s_i^1$ となる。$t\geq 3$ 期以降も同様の事が繰り返し行われることにより，任意のノード i のノード機能喪失対策費用投入の流列 $\left(s_i^0,s_i^1,\cdots\right)$ は $s_i^0<s_i^1<s_i^2<\cdots$ となり，単調増加的となる。ここで，$s_i\in[0,\bar{s}]$ であるので，任意のノード i のノード機能喪失対策費用投入の流列は有界である。上に有界な単調増加数列は収束するので，任意のノード i のノード機能喪失対策費用投入の流列はある極限 $\hat{s}_i$ へと収束する。

上述の動学プロセスのもとでの極限を $\hat{s}=(\hat{s}_1,\cdots,\hat{s}_n)$ としよう。収束の過程では任意のノード i に関して $\lim_{t\to\infty}\left(s_i^t-s_i^{t-1}\right)=0$ であり，s_i^t は s_{-i}^{t-1} を所与としたときのノード i の最適反応である。したがって，極限 $\hat{s}$ においては全てのノードは他のノードのノード機能喪失対策費用投入を所与として最適反応をとっている。すなわち，極限 $\hat{s}$ はナッシュ均衡 $s^*=\left(s_1^*,\cdots,s_n^*\right)$ に他ならない。

以上より，以上の動学プロセスのもとでノード機能喪失対策費用投入ゲームは $s^*=\left(s_1^*,\cdots,s_n^*\right)$ へ一意に収束する。

Q.E.D.

3　数値解析分析

本節では，各ノードは同質であり，任意のノード $i,j,k\in N$ に関して $w_{ii}=w_{jj}=0$，$w_{ij}=w_{jk}=1$，$c_{ij}=c_{jk}=2c$ であり，$n=4$ であるとする。また，本節ではリンク形成の際に双方のノードがリンク形成費用を拠出するものとする。

ノード i のノード機能喪失確率 α_i を以下のように特定化する。

$$\alpha_i = \frac{\bar{\alpha}}{1+\varphi s_i}. \tag{12}$$

ここで，$0<\bar{\alpha}<1$ であるとする。また，リンクを形成している全てのノードが正の機能喪失対策費用を投入することを保証する為に以下を仮定する[10)]。

$$\varphi > \frac{1}{\bar{\alpha}(1-\bar{\alpha})}.$$

(12) 式のもとでは，g と s を所与として，ノード i の期待利得は以下のようになる。

$$U_i(g,s) = \sum_{z=0}^{2}\sum_{a=1}^{{}_4C_z}\left[\prod_{x\in Z_{\bar{g}_z^a}}\left(\frac{\bar{\alpha}}{1+\varphi s_x}\right)\prod_{y\in I_{\bar{g}_z^a}}\left(1-\frac{\bar{\alpha}}{1+\varphi s_y}\right)\mu_i\left(\bar{g}_z^a\right)w\right] - \mu_i^d\left(\bar{g}_z^a\right)c - s_i. \tag{13}$$

ここで，$\mu_i\left(\bar{g}_z^a\right)$ は $\bar{g}_z^a$ においてノード i が便益を得ることのできるノードの数を表している。

また，(13) 式において，g を所与としてノード i の期待利得利得最大化条件は以下のようになる。

$$\sum_{z=0}^{2}\sum_{a=1}^{{}_4C_z}\left[\frac{\varphi\bar{\alpha}}{(1+\varphi s_i)^2}\prod_{x\in Z_{\bar{g}_z^a}}\left(\frac{\bar{\alpha}}{1+\varphi s_x}\right)\prod_{y\in I_{\bar{g}_z^a}\setminus\{i\}}\left(1-\frac{\bar{\alpha}}{1+\varphi s_y}\right)\mu_i\left(\bar{g}_z^a\right)w\right] = 1.$$

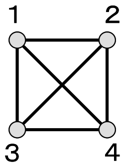
いま $n=4$ であり各ノードのノード機能喪失確率が (12) 式であるとき，$\bar{\alpha}=0.9$，$\varphi=5$ として，形成可能な全てのネットワークについて最大のネットワーク価値を MATHEMATICA によって計算し，任意のリンク形成費用 c においてどのような形状のネットワークでどのようなノード機能喪失対策費用投入の組が最もネットワーク価値が高いのかを分析した。図 1 に示すネットワークはリンク形成費用 c を所与として最もネットワーク価値が高いとされたものである (ただし空ネットワークは除外している)。

ここで，図 1 において，s^E は各ネットワークの価値を最大化する各ノードのノード機能喪失対策費用投入の組を表している。また，$W(g,s^E)$ は s^E を所与とした時のネットワーク $\bar{g}$ のネットワーク価値を表している。次の図 2 はリンク形成費用 c の違いによってどのようなネットワークが最もネットワーク価値が高くなるのかを図示したものである。

10)　この条件は，ノード i，j の間にリンク ij のみが形成されており，$s_i=s_j=0$ である場合に，限界的に機能喪失対策費用を投入することで自身の期待効用が増加するための条件であり，リンクを形成しているノードが正の機能喪失対策費用を投入する為の十分条件である。

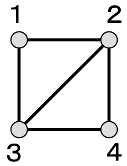
図１　各ネットワークにおける最大価値と各ノードのノード機能喪失対策費用

完全ネットワーク



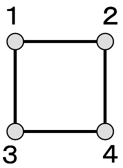
$$W\left(\overline{G}^N, s^E\right) = 4.88442 - 12c$$
$$s^E = (0.7337,\ 0.7337,\ 0.7337,\ 0.7337)$$

多極型ネットワーク



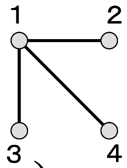
$$W\left(\overline{G}^M, s^E\right) = 4.83726 - 10c$$
$$s^E = (0.729901,\ 0.757585,\ 0.757585,\ 0.729901)$$

サークルネットワーク



$$W\left(\overline{G}^C, s^E\right) = 4.78916 - 8c$$
$$s^E = (0.754249,\ 0.754249,\ 0.754249,\ 0.754249)$$

星型ネットワーク



$$W\left(\overline{G}^*, s^E\right) = 4.24594 - 6c$$
$$s^E = (1.04567,\ 0.694415,\ 0.694415,\ 0.694415)$$

図２　リンク形成費用と効率的ネットワーク

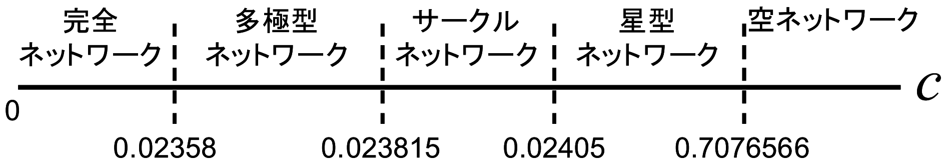


図１において，各ネットワークにおける各ノードが投入するノード機能喪失対策費用に注目すると，完全ネットワーク $\overline{G}^N$ とサークルネットワーク $\overline{G}^C$ に関しては，各ノードは同額のノード機能喪失対策費用の投入を行っているが，多極型ネットワークと星型ネットワーク $\overline{G}^*$ においては，より多くのリンクを形成しているノードほど多くのノード機能喪失対策費用を投入していることが確認できる。すなわち，たとえ各ノードが同質であったとしても，ネットワークの形状によって効率的ネットワークを達成するために必要な各ノードのノード機能喪失対策費用の投入に違いが生じるということである。このことは，命題５にて解析的に証明したが，シミュレーションにおいても確認された。ここで，多極型ネットワークにおいて，s_{-2}＝(0.729901, 0.757585, 0.729901) としてノード２の期待利得を最大化すると，ノード２にとっての最適なノード機能喪失対策費用投入は s_2＝(0.46066) であった。すなわち，図１にお

ける多極型ネットワークはノード機能喪失対策費用投入においてナッシュ均衡を達成していないことになる。このことは，命題 4 にて証明していた事であるが，実際に数値解析によっても確認された。また星型ネットワークにおいて，$s_{-1}=(0.694415,\ 0.694415,\ 0.694415)$ として，ノード 1 の期待利得を最大化すると，ノード 1 にとっての最適なノード機能喪失対策費用投入は $s_1=(0.456754)$ であった。星型ネットワークが効率性を達成するために必要なノード 2 のノード機能喪失対策費用投入は $s_1^E=(1.04567)$ であるので，ノード 1 がネットワーク価値最大化のために自らの期待利得最大化を達成するノード機能喪失対策費用投入の 2 倍以上の費用投入を強いられていることが分かる。また，多極型ネットワークにおけるノード 2，ノード 3 と，星型ネットワークにおけるノード 1 は同じく 3 本のリンクを形成しているが，効率性を達成するために必要なノード機能喪失対策費用投入は異なっており，星型ネットワークにおけるノード 1 が強いられるノード機能喪失対策費用投入の方が高いことが確認できる。このことからは，多極分散型ネットワークにおける各ノードと比べて一極集中型のネットワークにてハブとなっているノードはネットワークにおける重要度 (限界的なノード機能喪失対策費用投入がもたらすネットワーク価値の限界的な増加) が他のノードと比べて非常に大きいため，効率性を達成するために多くのノード機能喪失対策費用投入が要求される事が予想される。

おわりに

本稿は Bala and Goyal (2000b) を，ノードの持つ「ネットワークから得る便益をリンクを通じて他のノードへ伝達する」,「自らの便益とネットワークを通じて他のノードから便益を得る」という 2 つのノード機能が確率的に失われるモデルへと拡張した。また，ノード機能を失う確率をノード自身がノード機能喪失対策費用の投入を行うことによって変化させることができるものとし，ノード機能喪失確率が内生的に決定されるモデルを提示した。

ノード機能喪失対策費用投入ゲームにおいて，いかなるネットワークにおいても最大と最小のナッシュ均衡が存在することを示した。また，empty ネットワーク以外のいかなるネットワークもノード機能喪失対策費用投入ゲームにおいてナッシュ均衡と効率性を同時達成できないことを示した。また，ナッシュ均衡と効率性のどちらの達成に際しても，他のノードに対して大きな影響を与えるノードほど多くの費用投入が必要となることを示した。

数値解析分析を行い，シミュレーションによっていくつかのネットワークにおける効率的なノード機能喪失対策費用投入がどのようになるかを確認した。結果として，効率性を達成するために，ネットワークにおけるハブの役割を果たしているノードほど多くの費用投入を強いら

れており，効率性とナッシュ均衡が同時に達成されていないことが確認された。

最後に本稿における課題を述べる。本稿ではネットワークを所与として，ノード機能喪失対策費用投入ゲームのみを分析してきた。しかし，ノード機能喪失対策費用投入ゲームの結果がネットワーク形成に対して及ぼす影響 (その逆も同様) は当然無視できないものである。したがって，今後は本稿の結果をもとにして，ネットワーク形成ゲームモデルを構築し，ノード機能喪失対策費用投入ゲームとネットワーク形成ゲームの相互関係を考慮したモデルの構築を行わなければならない。

参 考 文 献

[1] Bala V. and S. Goyal (2000a), "A Non-cooperative Model of Network Formation", *Econometrica*, 68, pp. 1181–1229.

[2] Bala V. and S. Goyal (2000b), "A strategic analysis of network reliability", *Review of Economic Design*, 5, pp. 205–228.

[3] Freeman, L.C. (1977), "A set of measures of centrality based on betweeness", *Sociomety*, 40, pp. 35–41.

[4] Freeman, L.C., Borgatti, S.P., and White, D.R. (1991), "Centrality in valued graphs: A measure of betweenness based on network flow", *Social Networks*, 13, pp. 141–154.

[5] Galeotti, A., Goyal, S., Kamphorst, J., (2006), "Network Formation with Heterogeneous Players", *Games and Economic Behavior*, vol. 54, pp. 353–372.

[6] Haller, H., Kamphorst, J., Sarangi, S. (2007) "(Non-) existence and scope of Nash networks", *Economic Theory*, 31, pp. 597–604.

[7] Haller, H., Sarangi, S. (2003) "Nash Networks with Heterogeneous Agents", *mimeo*.

[8] Harary, F. and Ostrand, P. (1971), "Cutting center theorem for trees", *Discrete Mathematics*. 1, pp. 7–18.

[9] Jackson, M.O. and A. Wolinsky (1996), "A Strategic Model of Social and Economic Networks", *Journal of Economic Theory*, 71, pp. 44–74.

[10] Jun, T. and Kim, J. (2007) "Connectivity, stability and efficiency in a network as an information flow", *Mathematical Social Sciences*, 53, 314–331.

[11] Milgrom Paul and Jhon Roberts (1990), "Rationalizability, Learning, and Equilibrium in Games with Strategic Complementarities", *Econometrica*, 58, pp. 1255–1279.

[12] R. Albert, H. Jeong, A.-L. Barabasi (2000), "Error and attack tolerance of complex networks", *Nature*, 406, pp. 378–382.

[13] 宇野木広樹 (2007)，「ネットワーク分断リスク下におけるネットワーク効率性・安定性」，『熊本学園大学経済論集』，第 13 巻，第 3・4 合併号，2007 年，pp. 97–122.

Summary

Endogenous Network Division Risk and Strategic Node Function Loss Countermeasure Costs Injecting Game

This paper studies the strategic "node function loss countermeasure costs injecting game" in the case that nodes are deleted from the network, which in result make the transmission of information and/or benefit between nodes impossible.

In this model, we assume that each node probably loses the function of "transmitting benefit received from network to other nodes" and "getting benefits from the node itself and from other nodes via network". However, by injecting costs each node can change its probability of function loss.

In the node function loss countermeasure costs injecting game, we show that there exist maximum and minimum Nash equilibrium in any network. And that none but empty network can be Nash equilibrium and efficiency simultaneously. Even in the circumstance of achieving either Nash equilibrium or efficiency, the more a node affects other nodes, the more countermeasure costs against loss of node function it has to inject.

In the numerical analysis, we show properties of an efficient node function loss countermeasure costs injecting game in some networks.

Keywords: network formation game, endogenous network division risk, super-modular game, efficiency, Nash equilibrium